Е.В. Ширшов, Н.И. Петрик,
А.Г. Тутыгин, Т.В. Меньшикова

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Рекомендовано Учебно-методическим объединением
по образованию в области финансов, учета и мировой экономики
в качестве **учебного пособия** для студентов,
обучающихся по специальностям «Менеджмент»,
«Бухгалтерский учет, анализ и аудит», «Финансы и кредит»,
«Экономика и управление в отраслях лесного комплекса»

Издание пятое,
переработанное и дополненное



МОСКВА
2010

УДК 681.140
ББК 65.26я73
Ш64

Эксперт:
М.С. Красс, проф. кафедры математического моделирования экономических процессов Финансовой академии при Правительстве РФ, д-р физ.-мат. наук

Рецензенты:
П.Д. Андреев, доц. кафедры математического анализа и геометрии Поморского государственного университета им. М.В. Ломоносова, канд. физ.-мат. наук,
В.А. Скрипниченко, проф. кафедры финансов, налогообложения и бюджета Всероссийского заочного финансово-экономического института, д-р экон. наук

Ширшов Е.В.
Ш64 Финансовая математика : учебное пособие / Е.В. Ширшов, Н.И. Петрик, А.Г. Тутыгин, Т.В. Меньшикова. — 5-е изд., перераб. и доп. — М. : КНОРУС, 2010. — 144 с.

ISBN 978-5-406-00823-2

Систематизированы методы количественного финансового анализа. Приведены различные методы и способы разнообразных финансовых и кредитных расчетов. Подробно рассмотрены методы начисления процентов, обобщающие характеристики рентных платежей, методики определения эффективности краткосрочных и долгосрочных финансовых вложений.

Для студентов, аспирантов и преподавателей экономических вузов, обучающихся по специальностям «Менеджмент», «Бухучет и аудит», «Финансы и кредит», «Экономика и управление в отраслях лесного комплекса» всех форм обучения.

УДК 681.140
ББК 65.26я73

Ширшов Евгений Васильевич
Петрик Надежда Ивановна
Тутыгин Андрей Геннадьевич
Меньшикова Татьяна Викторовна

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.02.953.Д.003365.04.09 от 01.04.2009 г.

Изд № 2481. Подписано в печать 12.02.2010. Формат 60×90/16.
Печать офсетная. Гарнитура «TimesNewRoman».
Усл. печ. л. 9,0. Тираж 2000 экз. Заказ № 1914.

ООО «Издательство КноРус».
129110, Москва, ул. Большая Переяславская, 46, стр. 7.
Тел.: (495) 680-7254, 680-0671, 680-1278.
E-mail: office@knorus.ru http://www.knorus.ru

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов
в ГУП «Брянское областное полиграфическое объединение»
241019, г. Брянск, пр-т Ст. Димитрова, 40.

ISBN 978-5-406-00823-2

СОДЕРЖАНИЕ

Приложения

ВВЕДЕНИЕ

В любом из современных курсов экономики используется математический аппарат. Профессиональное занятие бизнесом требует, прежде всего, умения оценивать все возможные варианты финансовых последствий при совершении любой сделки. Центральная проблема экономики — это проблема рационального выбора, для этого необходимы определенные знания в области финансовых вычислений, основанные на теории и практике количественного финансового анализа. Роль математических методов в экономике постоянно возрастает.

В первом разделе пособия рассмотрены основные понятия финансового количественного анализа, приведены параметры финансовых вычислений — проценты, система процентных ставок, наращение процентов, дисконтирование платежей, финансовая эквивалентность платежей, влияние инфляционных процессов, консолидация платежей, аннуитеты, показана их взаимосвязь.

Во втором разделе уделено внимание вопросам, относящимся к количественному анализу разнообразных потоков платежей. Рассмотрены методы погашения долгов, ипотечное кредитование, операции с ценными бумагами, страхование.

Все разделы пособия содержат типовые примеры, что облегчает восприятие теоретического материала и делает его доступным для самостоятельного освоения и применения в практической деятельности как студентами, так и специалистами различных финансовых институтов. Изложение материала построено от простого к сложному, что позволяет сделать правильный математический расчет в определенной хозяйственной ситуации и сделать выбор.

Пособие представляет интерес не только для студентов экономических вузов, бизнес-школ, колледжей, но и специалистов — сотрудников банков, инвестиционных компаний, пенсионных фондов и страховых компаний.

Раздел I
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

1. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ ПРОЦЕНТОВ

Проценты, процентные деньги — это абсолютная величина дохода (interest) от предоставления капитала в долг в любой ее форме: выдача ссуды, покупка облигации, учет векселя, продажа товара в кредит и т.д. Проценты обозначаются буквой I. Величина полученного дохода определяется исходя из:

1) величины вкладываемого капитала P;

2) срока n, на который вкладывается капитал;

3) размера и вида процентной ставки (обозначения i, d, j, f, σ).

Наращение основной суммы S происходит за счет присоединения процентных денег к основному капиталу: $S = P + I$.

Коэффициентом наращения называется безразмерная величина, которая показывает, во сколько раз вырос капитал.

Период начисления — это промежуток времени, за который начисляются проценты. Период начисления может быть разбит на интервалы, по прошествии которых происходит начисление процентов.

Существуют два способа начисления процентов: декурсивный и антисипативный. При *декурсивном* способе проценты начисляются в конце каждого интервала начисления. Их величина определяется исходя из предоставляемого капитала P. Процентная ставка представляет собой отношение суммы начисленного за определенный интервал дохода (процентов) к сумме имеющегося капитала на начало данного интервала. При *антисипативном* (предварительном) способе проценты начисляются в начале каждого интервала. Сумма процентных денег (дохода) определяется исходя из наращенной суммы. В этом случае процентная ставка представляет собой отношение суммы дохода, выпла-

чиваемой за определенный интервал, к величине наращенной суммы. Такая процентная ставка называется учетной (в широком смысле).

При обоих способах начисления проценты могут быть либо простыми, либо сложными.

1.1. Простые проценты

Величина процентной ставки определяется как $i = \frac{I_Г}{P}$, где $I_Г$ — сумма процентов за год; P — сумма капитала, предоставляемого в кредит. Процентная ставка выражается десятичной дробью.

Для простых процентов доход за n лет:

$$I = I_Г\, n.$$

Наращение основной суммы:

$$S = P + I = P + Pin = P(1 + in),$$

где $1 + in = k_н$ — коэффициент наращения.

Когда срок финансовой сделки не равен целому числу лет, период начисления равен отношению числа дней функционирования сделки к числу дней в году K, т. е.:

$$n = \frac{\partial}{K}.$$

В этом случае формула наращенной суммы примет вид:

$$S = P \cdot (1 + i \cdot \frac{\partial}{K}).$$

На практике применяются три варианта расчета процентов с использованием временной базы K.

1. Точные проценты с точным числом дней ссуды (английская практика). Продолжительность года K (временная база) равна 365 (366) дням. Точное число дней ссуды определяется путем подсчета числа дней между датой выдачи ссуды и датой ее погашения. Для подсчета числа дней можно воспользоваться прил. 1.

2. Обыкновенные (коммерческие) проценты с точным числом дней ссуды (французская практика). Величина ∂ рассчитывается как в предыдущем случае, а временная база принимается: $K = 360$ дн.

3. Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды (германская практика). В этом случае год делится на 12 месяцев по 30 дней в каждом и временная база $K = 360$ дн.

При точном и приближенном методах начисления процентов день выдачи и день погашения ссуды принимают за один день.

Пример 1.1. Банк выдал кредит 50 тыс. руб. 15 января. Срок возврата кредита — 12 сентября. Процентная ставка установлена в размере 10% годовых. Год невисокосный. Определить сумму, подлежащую возврату.

Р е ш е н и е. Наращенную сумму долга S, подлежащую возврату, рассчитаем тремя методами.

1. По формуле точных процентов с точным числом дней ссуды. Точное число дней ссуды определим по прил. I. Порядковый номер 15 января — 15, порядковый номер 12 сентября — 255. Точное число дней ссуды: $\partial = 255 - 15 = 240$ дн.

$$S = 50 \cdot (1 + 0{,}1 \cdot \frac{240}{365}) \approx 53{,}288 \text{ тыс. руб.}$$

2. По формуле обыкновенных процентов с точным числом дней ссуды:

$$S = 50 \cdot (1 + 0{,}1 \cdot \frac{240}{360}) \approx 53{,}333 \text{ тыс. руб.}$$

3. По формуле обыкновенных процентов с приближенным числом дней ссуды. Приближенное число дней ссуды: январь — 16 дней, февраль, март, апрель, май, июнь, июль, август — 30 × 7 дн., сентябрь — 12 дн.

Тогда:

$$\partial = 16 + 30\ 7 + 12 - 1 = 237 \text{ дн.};$$

$$S = 50 \cdot (1 + 0{,}1 \cdot \frac{237}{360}) \approx 53{,}292 \text{ тыс. руб.}$$

Начиная с 2000 г. в нашей стране для реальных расчетов применяется английская практика (начисление точных процентов).

Рассмотрим случай, когда на различных интервалах начисления процентов применяются различные простые процентные ставки. Наращенная сумма на конец срока определяется следующим образом:

$$S = P(1 + i_1 n_1 + i_2 n_2 + \ldots + i_m m_m) = P(1 + \sum_{t=1}^{m} i_t n_t),$$

где i_t — ставка простых процентов в периоде t;

$t = \overline{1,m}$;

n_t — продолжительность периода;

$n = \sum_{t=1}^{m} n_t$.

Пример 1.2. Контракт предусматривает следующий порядок начисления процентов: первый год — ставка 10%, в каждом последующем полугодовая ставка повышается на 1%. Необходимо определить коэффициент наращения за два года.

Решение. Находим коэффициент наращения:

$$k_{н} = 1 + \sum_{t=1}^{m} i_t n_t = 1 + 0{,}1 \cdot 1 + 0{,}11 \cdot 0{,}5 + 0{,}12 \cdot 0{,}5 = 1{,}215.$$

Обычно к наращению по простым процентам прибегают при выдаче краткосрочных ссуд (на срок до одного года) или в случае, когда проценты не присоединяются к сумме долга, а периодически выплачиваются кредитору.

На практике при инвестировании средств в краткосрочные депозиты прибегают к начислению процентов на уже наращенные в предыдущем периоде суммы, т. е. происходит многоразовое наращение, именуемое реинвестированием, или капитализацией, процентов. В этом случае наращенная сумма определяется по формуле:

$$S = P(1 + i_1 n_1)(1 + i_2 n_2) \cdot \ldots \cdot (1 + i_m n_m).$$

Пример 1.3. 200 руб. положены 1 марта на месячный депозит под 12% годовых. Какова наращенная сумма, если операция повторяется три раза?

Решение. Если начисляются точные проценты, то

$$S = 200 \cdot (1 + 0{,}12 \cdot \frac{31}{365}) \cdot (1 + 0{,}12 \cdot \frac{28}{365}) \cdot (1 + 0{,}12 \cdot \frac{31}{365}) \approx 205{,}97 \text{ руб.}$$

Начисление обыкновенных процентов (германская практика), наращенная сумма:

$$S = 200 \cdot (1 + 0{,}12 \cdot \frac{30}{360})^3 \approx 206{,}06 \text{ руб.}$$

1.2. Простые учетные ставки

Простая учетная ставка — антисипативный способ начисления процентов. Суть его сводится к тому, что проценты начисляются в начале расчетного периода, при этом за базу (100%) принимается сумма погашения долга.

Введем обозначения:

d % — простая годовая учетная ставка;

d — относительная величина этой ставки;

$D_г$ — сумма процентных денег за год;

D — сумма процентных денег за период, равный n.

Тогда простая учетная ставка:

$$d\% = \frac{D_Г}{S} \cdot 100\%; \;\; d = \frac{D_Г}{S},$$

где S — наращенная сумма.

Сумма процентных денег за один год составит $D_г = dS$, а за период n: $D = D_г\, n = Sdn$. Произведем преобразования:

$$S = P + D;\ S = P + Sdn;\ S - Sdn = P;\ P = S(1 - dn).$$

Получаем: $S = \frac{P}{1-dn}$ — основная формула для простых антисипативных процентов. Здесь $\frac{1}{1-dn}$ — коэффициент наращения.

Можно также записать:

$$S = \frac{P}{1 - d \cdot \frac{\partial}{K}}.$$

Пример 1.4. Через 180 дней после подписания договора должник уплатит 310 руб. Кредит выдан под 16% годовых. Какова первоначальная сумма долга при условии, что при начислении процентов используется простая учетная ставка и временная база $K = 360$ дн.?

Решение. Первоначальная сумма долга — это величина P:

$$P = 310 \cdot (1 - 0{,}16 \cdot \frac{180}{360}) \approx 285{,}54 \text{ руб.}$$

На практике расчеты по простым учетным ставкам чаще всего применяются при учете векселей и других краткосрочных долговых обязательств.

Пример 1.5. Владелец векселя учел его в банке по простой учетной ставке 9% за 30 дней до срока погашения, получив при этом 4963 руб. Определить номинал векселя.

Решение. Номинал векселя — это величина S:

$$S = \frac{4963}{1 - 0{,}09 \cdot \frac{30}{365}} \approx 5000 \text{ руб.}$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.1. Сумма процентов, начисленных в период с 10 января по 31 октября, составила 1568 руб.

Определить размер первоначального капитала, если банк начисляет проценты по ставке 11% годовых при условии, что год невисокосный.

Задача 1.2. Годовая ставка при начислении обыкновенных процентов по депозитному 30-дневному сертификату номиналом 100 тыс. руб. равна 10%. Год високосный.

Определить сумму точных процентов, выплаченных при погашении сертификата.

Задача 1.3. Переводный вексель выдан на сумму 500 тыс. руб. с уплатой 19 декабря. Векселедержатель учел вексель в банке 25 октября по учетной ставке 8%.

Определить сумму, полученную векселедержателем, и размер дисконта в пользу банка.

Задача 1.4. Сберегательный сертификат выдан на 186 дней под 16% годовых с погашением 50 тыс. руб. Год невисокосный.

Определить доход держателя сертификата.

Задача 1.5. На какой срок должен быть выпущен сберегательный сертификат номиналом 10 тыс. руб., если сумма погашения при 8% годовых составляет 10,5 тыс. руб.? Год — невисокосный.

Задача 1.6. Сберегательный сертификат номиналом 10 тыс. руб. выдан на 120 дней с погашением в сумме 12 тыс. руб.

Определить: 1) учетную ставку; 2) процентную ставку.

За временную базу принять 360 дней.

Задача 1.7. По сберегательному сертификату, выданному на 210 дней, начисляется дисконт в размере 12% от суммы погашения. Год — невисокосный.

Определить: 1) учетную ставку; 2) процентную ставку.

1.3. Сложные проценты

Основное отличие сложных процентов от простых заключается в том, что база для начисления процентов меняется от одного расчетно-

го периода к другому. Сумма начисленных в каждом периоде процентов добавляется к капиталу предыдущего периода, а начисление процентов в последующем периоде производится на эту, уже наращенную величину первоначального капитала. Механизм наращения первоначального капитала по сложным процентам называется капитализацией.

Как и в случае простых процентов существуют два способа начисления сложных процентов: антисипативный и декурсивный.

В случае декурсивнного способа расчета сложных процентов начисление процентов на первоначальную сумму производится в конце периода наращения.

В конце первого периода (года) наращенная сумма равна:

$$S_1 = P + P_i = P\ (1 + i).$$

В конце второго периода (года) проценты начисляются на уже наращенную сумму:

$$S_2 = P(1 + i) + P(1 + i)i = P(1 + i)(1 + i) = P(1 + i)^2$$

И так далее, в конце n-ого периода (года), наращенная сумма будет равна:

$$S_n = P\ (1 + i)^n.$$

Величина $(1 + i)^n$ является коэффициентом наращения сложных процентов (прил. II).

Если срок ссуды измеряется дробным числом лет, то наращенную сумму можно найти смешанным методом:

$$S = P(1 + i)^{[n]}\ (1 + \{n\}i),$$

где $[n]$ — целая часть числа n; $\{n\}$— дробная часть числа n.

В контрактах на получение кредитов часто предусматривается капитализация процентов по полугодиям, кварталам, иногда помесячно. В этом случае указывается годовая ставка j (номинальная). Тогда для начисления процентов m раз в году используется формула

$$S = P(1 + j/m)^{mn}.$$

Если срок ссуды измеряется дробным числом лет, а начисление процентов производится m раз в году, то наращенная сумма может быть определена по смешанному методу:

$$P(1 + j/m)^{mn}(1 + (j/m\{n\}),$$

где mn — число полных периодов начисления процентов, $\{n\}$— дробная часть одного периода начисления процентов.

Пример 1.6. На сумму 600 руб. ежеквартально по ставке 12% годовых начисляются сложные проценты в течение 14 месяцев. Определить величину наращенной суммы двумя методами.

Р е ш е н и е. Общее число периодов начисления процентов составит:

$mn = 4$, $\{n\}= 0{,}667$.

Наращенная сумма:

$$S = 600(1+0{,}12/4)^{4{,}667} = 688{,}75 \text{ руб.}$$

По смешанному методу начисления

$$S = 600(1+0{,}12/4)^4 \cdot (1+0{,}667 \cdot 0{,}12/4) = 688{,}81 \text{ руб.}$$

Нестабильность экономической ситуации вынуждает банки использовать в кредитных сделках изменяющиеся во времени, но заранее фиксированные для каждого периода ставки сложных процентов. В этом случае наращенная сумма может быть определена по формуле:

$$S = P(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}\dots(1+i_m)^{n_m} = P \cdot \prod_{t=1}^{m}(1+i_t)^{n_t} \quad ,$$

где i_t — процентная ставка в периоде t;

$t = \overline{1,m}$;

nt — продолжительность периода.

Способ начисления сложных антисипативных процентов аналогичен методу при использовании простых антисипативных процентов.

В первом периоде наращенная сумма определяется по формуле

$$S = P \cdot \frac{1}{1-d},$$

во втором:

$$S = P \cdot \frac{1}{1-d} \cdot \frac{1}{1-d} = P \cdot \frac{1}{(1-d)^2},$$

в n-м:

$$S = P \cdot \frac{1}{(1-d)^n},$$

где $\frac{1}{(1-d)^n}$ — коэффициент наращения при вычислении сложных антисипативных процентов;

d — учетная ставка сложных процентов;

n — число лет.

При наращении сложных процентов по учетной ставке несколько раз в году (m раз) наращенная сумма определяется по формуле:

$$S = P \cdot \frac{1}{(1 - f/m)^{mn}},$$

где f — номинальная учетная ставка;

m — число период начисления процентов в течение года;

n — число лет.

Пример 1.7. Срочный вклад в размере 800 руб. положен в банк на 2,5 года. По условиям договора начисления процентов производится один раз в году по сложной учетной ставке d = 15% годовых. Определить наращенную сумму.

Р е ш е н и е. Наращенная сумма составит:

$$S = \frac{800}{(1-0{,}15)^{2{,}5}} = 1201 \text{ руб.}$$

Если наращение по учетной ставке производить не один, а два раза в год ($m = 2$), то наращенная сумма будет равна:

$$S = \frac{800}{(1-0{,}15/2)^5} = 1181{,}36 \text{ руб.}$$

1.4. Непрерывные проценты

Начисление процентов на первоначальный капитал может производиться столь часто, что этот процесс можно рассматривать как непрерывный.

При дискретном начислении процентов m раз в году по номинальной ставке j наращенная сумма

$$S = P(1 + j/m)^{mn}.$$

При $m \to \infty$:

$$S = \lim_{m\to\infty} P(1 + j/m)^{mn} = P \cdot \lim_{m\to\infty}\left((1 + j/m)^{\frac{m}{j}}\right)^{jn} = Pe^{jn},$$

где e^{jn} — коэффициент наращения при непрерывной капитализации процентов.

Если ставку непрерывных процентов j (силу роста) обозначить через ∂, то величину наращенной суммы запишем в следующем виде:

$$S = Pe^{\sigma n}.$$

Дискретные и непрерывные ставки наращения находятся в функциональной зависимости между собой. Из равенства коэффициентов наращения:

$$(1+i)^n = e^{\sigma n}$$

следует, что

$$\sigma = \ln(1+i), i = e^{\sigma} - 1.$$

Пример 1.8. На первоначальный капитал в сумме 500 руб. начисляются сложные проценты — 8% годовых в течение 4 лет. Определить наращенную сумму, если начисление процентов производится непрерывно.

Решение. Найдем сначала силу роста σ, а потом наращенную сумму S:

$$\sigma = \ln(1+i) = \ln 1{,}08 = 0{,}0769611;$$

$$S = Pe^{\sigma n} = 500 \cdot e^{0{,}0769611} \approx 680{,}25 \text{ руб.}$$

В практических финансово-кредитных операциях непрерывные проценты применяются крайне редко. Они имеют теоретическое значение, используются в анализе сложных финансовых проблем при обосновании и выборе инвестиционных проектов.

2. ДИСКОНТИРОВАНИЕ И ЕГО СУЩНОСТЬ

В финансовой практике часто сталкиваются с задачей, обратной наращению процентов: по заданной сумме S, которую следует уплатить через некоторое время n, необходимо определить сумму полученной ссуды P. В этом случае говорят, что сумма S дисконтируется. Величину P, найденную дисконтированием наращенной суммы S, называют совре-

менной стоимостью. С помощью дисконтирования в финансовых операциях учитывается фактор времени. Разность $S - P$ можно рассматривать не только как проценты, начисленные на P, но и как дисконт D с суммы S: $D = S - P$.

2.1. Математическое дисконтирование

Запишем формулу наращения по простой ставке процентов следующим образом:

$$P = \frac{S}{1+in}.$$

Величина $\frac{1}{1+in} = k_d$ — коэффициент дисконтирования по простым процентам.

Пример 2.1. Владелец векселя номинальной стоимости 400 руб. и сроком обращения один год предъявил его банку-эмитенту для учета за 90 дней до даты погашения. Банк учел его по ставке 12% годовых (проценты простые). Определить дисконтированную величину и величину дисконта, временная база $K = 360$.

Решение. Сумма, полученная владельцем векселя в результате его учета:

$$P = \frac{400}{1+\frac{90}{360}\cdot 0{,}12} = 388{,}35 \text{ руб.}$$

Величина дисконта $D = 400 - 388{,}35 = 11{,}65$ руб.

2.2. Банковское дисконтирование

Банковское дисконтирование основано на использовании учетной ставки d, т.е. проценты за пользование ссудой начисляются на сумму, подлежащую уплате в конце срока ссуды.

При банковском дисконтировании современная стоимость P величины S определяется по формуле:

$$P = S(1 - dn),$$

отсюда $D = Sdn$.

Рассмотрим пример 2.1. По условию S = 400, ∂ = 90, K = 360, возьмем учетную ставку d = 12%. Тогда дисконтированная величина

$$P = 400\left(1 - 0{,}12 \cdot \frac{90}{360}\right) = 388 \text{ руб.}$$

Величина дисконта

$$D = S - P = 400 - 388 = 12 \text{ руб.}$$

В отдельных случаях может возникнуть ситуация, когда совмещают начисление процентов по ставке i и дисконтирование по ставке d. В этом случае наращенная величина ссуды будет определяться по формуле:

$$S = P\ (1 + in)(1 - dn'),$$

где n — общий срок платежного обязательства;

n' — срок от момента учета обязательства до даты погашения долга, т. е. $n' < n$.

Пример 2.2. Долговое обязательство в сумме 2000 руб. должно быть погашено через 90 дней по ставке 10% годовых. Владелец обязательства учел его в банке за 30 дней до наступления срока по учетной ставке 12%. Найти полученную после учета векселя сумму и величину дисконта.

В соответствии с приведенной выше формулой:

$$S = 2000\left(1 + 0{,}1 \cdot \frac{90}{360}\right)\left(1 - 0{,}12 \cdot \frac{30}{360}\right) = 2029{,}50 \text{ руб.}$$

2.3. Дисконтирование по сложной процентной и по сложной учетной ставкам

Современная стоимость P величины S находится в случае сложной процентной ставки по формуле:

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} = S(1+i)^{-n} = S \cdot k_{i,n},$$

где $k_{i,n} = (1+i)^{-n}$ — дисконтный коэффициент (коэффициент дисконтирования). Значения этого коэффициента табулированы (см. прил. III).

Величина дисконта:

$$D = S - P = S(1 - (1+i)^{-n}).$$

При начислении процентов m раз в году получим:

$$P = S\cdot\frac{1}{(1+j/m)^{mn}} = S\cdot(1+j/m)^{-mn} = S\cdot k_{\frac{j}{m},mn},$$

где $k_{\frac{j}{m},mn} = (1+j/m)^{-mn}$ — можно определить, используя прил. III.

Величина дисконта:

$$D = S - P = S(1-(1+j/m))^{-mn}.$$

Пример 2.3. Определить современную стоимость 20 тыс. руб., которые должны быть выплачены через четыре года. В течение этого периода на первоначальную сумму начислялись сложные проценты по 8% годовых: а) ежегодно; б) ежеквартально.

Р е ш е н и е. Если начисление процентов производилось один раз в конце года, то современная величина 20 тыс. руб. составляет:

$$P = 20\cdot(1 + 0{,}08)^{-4} = 20\cdot 0{,}7350 = 14{,}70 \text{ тыс. руб.}$$

Если же начисление процентов производилось ежеквартально, то

$$P = 20\cdot(1+\tfrac{0{,}08}{4})^{-4\cdot 4} = 20\cdot 0{,}7284 = 14{,}57 \text{ тыс. руб.}$$

В учетных операциях широко применяется сложная учетная ставка. В этом случае:

$$P = S\,(1-d)^n;$$
$$D = S - P = S\,(1-(1-d)^n).$$

При дисконтировании m раз в году используется номинальная учетная ставка f.

В этом случае:

$$P = S\,(1-f/m)^{mn};$$
$$D = S\,(1-(1-f/m)^{mn}).$$

Пример 2.4. Долговое обязательство на сумму 6 тыс. руб. со сроком погашения через два года было передано в банк для учета. Дисконтирование производилось по ставке f = 9% при m = 4. Определить величину дисконта.

Р е ш е н и е. На руки владелец обязательства получит следую-щую сумму:

$$P = 6\ \ (1 - 0{,}09\ /\ 4)^{2\times 4} = 5{,}0013 \text{ тыс. руб.}$$

Величина дисконта:

$$D = 6000 - 5{,}0013 = 0{,}9987 \text{ тыс. руб.}$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.1. По муниципальной облигации номиналом 10 тыс.руб. выпущенной на 2,5 года, предусмотрен следующий порядок начисления процентов: первый год — 60%, в каждом последующем полугодии ставка повышается на 5%.

Требуется:

1) определить наращенную стоимость облигации по простой и учетной ставкам;

2) составить план наращения первоначальной стоимости по простым ставкам;

3) рассчитать наращенную стоимость облигации по сложной процентной и сложной учетной ставкам;

4) составить план наращения первоначальной стоимости по сложным процентам;

5) построить графики наращения стоимости по простым и сложным процентам на базе процентной и учетной ставок;

6) проанализировать доходность вариантов наращения стоимости с позиций кредитора (держателя облигаций) и заемщика (эмитента облигаций).

Задача 2.2. Вексель, выданный на 120 дней, с обязательством уплатить 50 тыс. руб. учитывается по ставке 8%.

Определить приведенную наращенную стоимость и размер дисконта при математическом дисконтировании и коммерческом учете.

Задача 2.3. Вексель на 100 тыс. руб. с обязательством уплатить через 180 дней с 8 простыми процентами годовых учтен банком за 60 дней до наступления срока платежа по учетной ставке 6%.

Определить сумму, полученную векселедержателем, и размер дисконта в пользу банка.

Задача 2.4. Сберегательный сертификат номиналом 30 тыс. руб. под 60% годовых выдан на 180 дней и учтен за 120 дней до даты погашения по учетной ставке 75%.

Определить:

1) сумму, полученную держателем сертификата, при досрочном учете сертификата банком;

2) доходы держателя сертификата и банка;

3) выполнить проверку расчетом.

Задача 2.5. Сберегательный сертификат номиналом 100 тыс. руб. выдан на два года и 90 дней под процентную ставку 60%.

Определить сумму, полученную держателем сертификата при погашении займа.

Задача 2.6. Ставка по облигации номиналом 5 тыс. руб. — 6%.

Определить число лет, необходимое для удвоения стоимости облигации, применив простые и сложные проценты: а) по процентной ставке; б) по учетной ставке.

Задача 2.7. За какой срок наращенная стоимость облигации номиналом 100 тыс. руб. достигает 140 тыс. руб., при условии, что на нее начисляются сложные проценты по ставке 10% в году и поквартально? Расчеты выполнить по процентной и учетной ставкам.

3. ЭФФЕКТИВНАЯ СТАВКА ПРИ НАЧИСЛЕНИИ СЛОЖНЫХ ПРОЦЕНТОВ *m* РАЗ В ГОДУ

Эффективная ставка j — это годовая ставка сложных процентов, которую необходимо установить, чтобы получить такой же финансовый результат, как и при m — разовом начислении процентов в году по ставке j / m.

Наращенные суммы на один и тот же капитал равны:

$$P\,(1 + i_{\text{эф}})^n = P\,(1 + j/m)^{mn},$$

откуда

$$i_{\text{эф}} = (1 + j/m)^{m-1}.$$

Пример 3.1. Определить эффективную ставку сложных процентов с тем, чтобы получить такую же наращенную сумму, как и при использовании номинальной ставки 8% при ежеквартальном начислении процентов ($m = 4$).

Р е ш е н и е. Эффективная ставка сложных процентов равна:

$$i_{эф} = (1 + 0{,}08 /4)4 - 1 \approx 0{,}0824 \ (8{,}24\%).$$

Рассмотрим наращение на основе сложной учетной ставки. Здесь также возникает понятие эффективной ставки, под которой будем понимать сложную годовую учетную ставку, эквивалентную номинальной учетной ставке при заданном значении m.

Наращенные суммы на один и тот же капитал равны:

$$P \cdot \frac{1}{(1-d_{этм})^n} = P \cdot \frac{1}{(1-f/m)^{mn}}.$$

Следовательно, эффективная учетная ставка равна:

$$d_{этм} = 1-(1-f/m)^m.$$

4. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

Ставки, обеспечивающие равноценность последствий финансовых операций, называются эквивалентными.

Формулы для расчета наращенных сумм по простой ставке процентов и учетной ставке имеют вид:

$$S_1 = P_1(1 + in);\ S_2 = P_2\ (1/(1 - dn)).$$

Наращенные суммы и капиталы равны, т.е. $S_1 = S_2$ и $P_1 = P_2$. Тогда равны будут и коэффициенты наращения:

$$1 + in = 1 / (1 - dn).$$

Отсюда следует, что

$$i = \frac{d}{1-dn};\ d = \frac{i}{1+in}.$$

Последние формулы верны, когда временные базы K равны.

Если же начисление процентов по ставке i производится при K = 365 дн., а по ставке d при K = 360 дн., то легко доказать, что формулы эквивалентности принимают вид:

$$i = \frac{365d}{360 - d\partial}; \; d = \frac{360i}{365 + i\partial}.$$

Пример 4.1. Определить размер ставки простых ссудных процентов, эквивалентной простой учетной ставке 8% годовых, если продолжительность финансовой операции составит 1 год.

Р е ш е н и е. Эквивалентная ставка простых ссудных процентов, которая даст тот же финансовый результат, что и учетная ставка, составит:

$$i = \frac{0{,}08}{1 - 0{,}08} = 0{,}0870\,(8{,}70\%).$$

При расчете эквивалентности ставок следует иметь в виду, что для каждого периода наращения необходимо рассчитать свою эквивалентную ставку.

Рассмотрим эквивалентность простой и сложной процентных ставок при начислении процентов один раз в год.

Приравняем коэффициенты наращения:

$$(1 + ni_П) = (1 + i_C)^n.$$

Отсюда следует, что

$$i_П = \frac{(1 + i_C)^n - 1}{n}; \; i_C = (1 + i_П n)^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Задание.

Самостоятельно разобрать эквивалентность простой процентной ставки и сложной ставки при начислении процентов m раз в году, эквивалентность номинальной ставки сложных процентов при начислении процентов m раз в году и простой учетной ставки, эквивалентность сложных ставок и т.д.

5. СРЕДНИЕ ПРОЦЕНТНЫЕ СТАВКИ

Проблема эквивалентности ставок в некоторых случаях может быть решена с помощью равенства средних значений ставок.

Начнем с простой ставки. Пусть за периоды $n_1, n_2, ..., n_m$ начисляются простые проценты по ставкам $i_1, i_2, ..., i_m$ на один и тот же капитал P. Тогда на основе равенства коэффициентов наращения:

$$1+\bar{i}n = 1+\sum_{t=1}^{N} i_t n_t ,$$

получим искомую среднюю:

$$\bar{i} = \frac{\sum_{t=1}^{N} i_t n_t}{n} ,$$

где $n = \sum_{t=1}^{N} n_t$ — общий срок наращения.

Найденная характеристика представляет собой арифметическую среднюю взвешенную. Аналогичным способом получим среднюю учетную ставку:

$$\bar{d} = \frac{\sum_{t=1}^{N} d_t n_t}{n} .$$

Рассмотрим сложные ставки. Из равенства коэффициентов наращения

$$(1+\bar{i})^n = (1+i_1)^{n_1} \cdot (1+i_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (1+i_m)^{n_m}$$

следует:

$$\bar{i} = \sqrt[n]{\prod_{t=1}^{m} (1+i_t)^{n_t}} - 1 .$$

В этом случае $\bar{i}$ вычисляется как взвешенная средняя геометрическая.

Пример 5.1. Допустим, для первых двух лет ссуды применяется ставка 8%, для следующих трех лет она составляет 10%. Найдите среднюю ставку за весь срок ссуды.

Р е ш е н и е. Средняя ставка за пять лет ссуды составит:

$$\bar{i} = \sqrt[5]{(1+0{,}088)^2 (1+0{,}1)^3} - 1 = \sqrt[5]{1{,}5524784} - 1 \approx 0{,}0912\ (9{,}12\%) .$$

Рассмотрим случай, когда одновременно идет несколько однородных операций с разными ставками i_t и разными начальными суммами P_t, все суммы выданы на один и тот же срок n под простые проценты. Под какую ставку надо поместить $\sum P_t$, чтобы получить тот же результат?

Составим уравнение эквивалентности:

$$\sum P_t\left(1+\bar{i}n\right)=\sum P_t(1+i_t n),$$

откуда

$$\bar{i}=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{\sum P_t(1+i_t n)}{\sum P_t}-1\right)=\frac{1}{n}\cdot\frac{\sum P_t(1+i_t n)-\sum P_t}{\sum P_t}=\frac{\sum P_t i_t}{\sum P_t}.$$

Искомая ставка равна взвешенной средней арифметической, в качестве весов берутся размеры ссуд.

Если проценты сложные, то уравнение эквивалентности будет выглядеть так:

$$\sum P_t(1+\bar{i})^n=\sum P_t(1+i_t)^n,$$

отсюда средняя ставка сложных процентов:

$$\bar{i}=\sqrt[n]{\frac{\sum P_t(1+i_t)}{\sum P_t}}-1.$$

Пример 5.2. Выданы две ссуды: $P_1 = 1$ тыс. руб., $P_2 = 2$ тыс. руб. Первая выдана под 10% годовых, вторая — под 15%, сроки ссуд одинаковы и равны двум годам.

Р е ш е н и е. Найдем среднюю процентную ставку, если ставки простые:

$$\bar{i}=\frac{1\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}15}{3}\approx 0{,}1333\ (13{,}33\%).$$

Средняя процентная ставка для сложных ставок:

$$\bar{i}=\sqrt[2]{\frac{1\cdot 1{,}1^2+2\cdot 1{,}15^2}{3}}-1\approx 0{,}1336\ (13{,}36\%).$$

6. ДОХОДНОСТЬ ССУДНЫХ И УЧЕТНЫХ ОПЕРАЦИЙ С УДЕРЖАНИЕМ КОМИССИОННЫХ

За открытие кредита, учет векселей и другие операции кредитор часто взимает комиссионные, которые повышают доходность операции, так как сумма фактически выданной ссуды сокращается.

Пусть ссуда в размере P выдана на срок n. При ее выдаче удерживаются комиссионные. Величина комиссионных — Pg, где g — доля комиссионных в относительных единицах.

Пусть для начала сделка предусматривает начисление простых процентов по ставке i. При определении доходности этой операции в виде годовой ставки сложных процентов $i_{эф}$ исходим из того, что наращение величины $P - Pg$ по этой ставке должно дать тот же результат, что и наращение P по ставке i:

$$(P - Pg)(1 + i_{эф})^n = P(1 + in),$$

отсюда

$$i_{эф} = \sqrt[n]{\frac{1 + in}{1 - g}} - 1.$$

Пример 6.1. При выдаче ссуды на 180 дней под 8% годовых (проценты простые) кредитором удержаны комиссионные в размере 0,5% суммы кредита. Какова эффективность ссудной операции в виде годовой ставки сложных процентов? ($K = 365$).

Решение. Доходность ставки:

$$i_{эф} = \sqrt[\frac{180}{365}]{\frac{1 + 0{,}08\frac{180}{365}}{1 - \frac{0{,}5}{100}}} - 1 \approx 0{,}0927 \ (9{,}27\%).$$

Предположим, что необходимо охарактеризовать доходность в виде ставки простых процентов. Имеем:

$$(P - Pg)(1 + i_{эф}n) = P(1 + in);$$

$$1 + i_{эф}n = \frac{1 + in}{1 - g};$$

$$i_{эф} = \frac{in+g}{n(1-g)}.$$

Если рассмотреть предыдущий пример, то эффективная ставка простых процентов составит:

$$i_{эф.п} = \frac{\frac{180}{365}\cdot 0{,}08 + 0{,}005}{\frac{180}{365}\cdot(1-0{,}005)} = 0{,}0906\ (9{,}06\%).$$

Если ссуда выдается под сложные проценты и доходность мы определяем в виде ставки сложных процентов, то исходное уравнение для определения $i_{эф.с.}$ имеет вид:

$$(P-Pg)(1+i_{эф.с.})^n = P(1+i)^n;\ i_{эф.с} = \frac{1+i}{\sqrt[n]{1-g}} - 1.$$

Если доход извлекается из операции учета по простой учетной ставке, а доходность мы определяем в виде ставки сложных процентов, то балансовое уравнение имеет вид:

$$(P-Sg)(1+i_{эф.с})^n = S;\ S(1-nd-g)(1+i_{эф.с})^n = S;$$

$$i_{эф.с} = \frac{1}{\sqrt[n]{1-nd-g}} - 1.$$

Пример 6.2. Вексель учтен по ставке d =10% за 160 дней до его оплаты. При выполнении операции учета с владельца векселя удержаны комиссионные в размере 0,5%. Временная база учета 360 дней. Какова эффективность ссудной операции в виде годовой ставки сложных процентов?

Р е ш е н и е. Эффективность ссудной операции в виде годовой ставки сложных процентов равна:

$$i_{эф.с} = \frac{1}{\sqrt[\frac{160}{360}]{1-\frac{160}{360}\cdot 0{,}1 - 0{,}005}} - 1.$$

7. НАЛОГ НА ПОЛУЧЕННЫЕ ПРОЦЕНТЫ

В ряде стран проценты облагаются налогом, что, естественно, уменьшает реальную наращенную сумму.

Обозначим наращенную сумму до выплаты налогов через S, а с учетом выплаты — как S'. Пусть ставка налога на проценты равна g. В случае простых процентов налог равен $Ig = P\ i\ n\ g$. Найдем наращенную сумму S' после выплаты налогов:

$$S' = S - (S - P)g = S(1 - g) + Pg = P(1 + in)(1 - g) + Pg = P + Pin(1 - g) =$$
$$= P(1 + in\ (1 - g)).$$

Таким образом, учет налога сводится к сокращению процентной ставки: вместо ставки i фактически применяется ставка iЧ$(1 - g)$.

В долгосрочных операциях при начислении налога на сложные проценты возможны следующие варианты:

1) налог начисляется за весь срок сразу, т. е. на всю сумму процентов;

2) сумма налога определяется за каждый истекший год. Тогда ежегодная сумма налога будет величиной переменной, так как сумма процентов увеличивается во времени.

В первом случае сумма налога равна $P((1+i)^n - 1)g$, а наращенная сумма после выплаты налога:

$$S' = S - (S - P)g = S(1 - g) = S(1 - g) + Pg = P((1+i)^n(1 - g) + g).$$

Рассмотрим второй случай. Обозначим налог за год t как Gt. Тогда

$$G_t = (S_t - S_{t-1})g = (P(1+i)^t - (P(1+i)^{t-1})g = P(1+i)^{t-1}ig.$$

За первый год налог составит: $G_1 = Pig$;
за второй: $G_2 = P(1 + i)ig$;
за n-й: $G_n = P(1 + i)^{n-1}ig$.
Налог за n лет:

$$G = \sum_t G_t = \frac{Pig((1+i)^n - 1)}{(1+i) - 1} = Pg((1+i)^n - 1).$$

Пример 7.1. Пусть ставка налога на проценты равна 2%. Процентная ставка — 8% годовых, срок начисления — три года. Первоначаль-

ная сумма ссуды — 1000 руб. Определить наращенную сумму с учетом выплаты налога на проценты.

Р е ш е н и е. При начислении простых процентов за весь срок получим: наращенная сумма без уплаты налогов:

$$S = P(1 + in) = 1\ 000(1 + 0{,}08\ 3) = 1240 \text{ руб.},$$

с учетом их выплаты в конце срока:

$$S' = P(1 + n\ (1 - g)i) = 1000(1 + 3 \times 0{,}98 \times 0{,}08) = 1235{,}2 \text{ руб.},$$

сумма налога:

$$1240 - 1235{,}2 = 4{,}8 \text{ руб.}$$

Начислим теперь сложные проценты. Рассмотрим случай, когда сумма налога определяется за каждый истекший год.

Наращенная сумма без уплаты налогов:

$$S = P(1 + i)^n = 1000 \times 1{,}08^3 \approx 1259{,}71 \text{ руб.}$$

Налог за t-й год равен: $Gt = P(1 + i)^{t-1} ig$;

тогда за первый год: $G_1 = 100^0 \times 1{,}08 \times 0{,}08 \times 0{,}02 = 1{,}60$ руб.;

за второй год: $G_2 = 1000 \times 1{,}08 \times 0{,}08 \times 0{,}02 = 1{,}728$ руб.;

за третий год: $G_3 = 1000 \times 1{,}08^2 \times 0{,}08 \times 0{,}02 = 1{,}8662$ руб.

Сумма налога G за три года равна 5,19 руб. Наращенная сумма после выплаты налога составляет 1254,52 руб.

8. РАСЧЕТ НАРАЩЕННЫХ СУММ В УСЛОВИЯХ ИНФЛЯЦИИ

Инфляционные процессы, характерные для экономики многих стран, требуют того, чтобы они учитывались в финансовых расчетах.

Пусть за рассматриваемый промежуток времени стоимость потребительской корзины возросла с величины S до S_1 руб., тогда стоимость потребительской корзины изменилась на величину

$$\Delta S = S_1 - S\ .$$

Величина $\alpha = \dfrac{\Delta S}{S}$ называется уровнем инфляции. Она показывает, на сколько процентов выросли цены за рассматриваемый период времени.

Величина $\alpha = \frac{\Delta S}{S}$ называется темпом инфляции, тогда

$$S_1 = S + \Delta S = S + \frac{\Delta S}{S} \cdot S = S(1 + \alpha) .$$

Величина $1 + \alpha = I_И$ называется индексом инфляции. Индекс инфляции показывает, во сколько раз выросли цены за рассматриваемый период.

Пусть α — годовой темп инфляции, и пусть имеется некоторая сумма S. Для того чтобы сохранилась покупательская способность, сумма S должна составлять:

через один год: $S_1 = S(1 + \alpha)$;

через два года: $S_2 = S(1 + \alpha)^2$;

через n лет: $S_n = S(1 + \alpha)^n$.

За рассматриваемый период (n лет) индекс инфляции составит $I_{Иn} = (1 + \alpha)^n$. Таким образом, инфляционный рост цен подчиняется закону сложного процента.

Пример 8.1. Цены за каждый месяц растут на 8%. Найдите годовой уровень инфляции.

Р е ш е н и е. По условию месячный темп инфляции $\alpha = 0{,}08$, тогда индекс цен за год:

$$I_{Иn} = (1 + \alpha)^n = 1{,}08^{12} \approx 2{,}5182,$$

но

$$I_{И1} = 1 + \alpha_1,$$

где α_1 — темп инфляции за год.

Следовательно, $\alpha_1 = 1{,}5182$, и годовой уровень инфляции составляет 151,82%.

Если цены в текущем периоде повышаются на α_t% относительно уровня, сложившегося в предыдущем периоде, то индекс цен за три месяца равен $1{,}08 \times 1{,}06 \times 1{,}05 = 1{,}20204$, уровень инфляции составит 20,204%, а темп инфляции за три месяца равен: $\alpha = 0{,}20204$.

Пусть i — безынфляционная ставка, отражающая реальную доходность операции; i — процентная ставка, которая учитывает инфляцию. Тогда наращенная сумма S на первоначальный капитал P за год составит:

$$S = P\,(1 + i_\alpha) \text{ или } S = P\,(1 + i)(1 + \alpha),$$

отсюда:

$$(1 + i_\alpha) = (1 + i)(1 + \alpha),$$

$$i_\alpha = \text{i} + \alpha + \text{i} \text{ — формула Фишера.}$$

Годовую ставку i, чтобы учесть инфляцию, нужно увеличить на величину $\alpha + i\alpha$, эта величина называется инфляционной премией.

Можно сделать следующие выводы:

1) если ставка сложных процентов, в которую вложена инфляция, равна темпу инфляции (i = α), то реальная доходность операции равна нулю;

2) если $i_\alpha < \alpha$, то i < 0, т. е. финансовая операция убыточна;

3) если $i_\alpha > \alpha$, то i > 0, т. е. финансовая операция приносит реальный доход.

Пример 8.2. Кредит в 10 000 руб. выдан на два года. Реальная доходность должна составлять 11% годовых (проценты сложные). Расчетный уровень инфляции — 16% в год. Определить ставку процентов при выдаче кредита, а также наращенную сумму.

Решение. Найдем годовую ставку процентов, учитывающую инфляцию:

$$i_\alpha = i + \alpha + i\alpha = 0{,}11 + 0{,}16 + 0{,}11 \times 0{,}16 = 0{,}2876 \ (28{,}76\%).$$

Наращенная сумма

$$S = 10\,000\,(1 + 0{,}2876)^2 = 16579{,}14 \text{ руб.}$$

В случае, если период n отличен от одного года, для простых ссудных процентов мы имеем:

$$\text{I}_И + i_\alpha\, n = (1 + in)\, I_{Иn}.$$

Отсюда:

$$i_\alpha = \frac{(1 + in) I_{Иn} - 1}{n}.$$

Для сложных процентов:

$$(1 + i_\alpha)^n = (1 + i)^n\, I_И,$$

отсюда ставка сложных процентов, учитывающая инфляцию:

$$i_\alpha = (1 + i)\ \sqrt[n]{I_{Иn}} - 1.$$

Пример 8.3. Кредит 12 000 руб. выдан на три года. На этот период прогнозируется рост цен в 2,2 раза. Определить ставку процентов при выдаче кредита и наращенную сумму долга, если реальная доходность должна составлять 12% годовых по ставке сложных процентов.

Решение. Ставка сложных процентов, учитывающая инфляцию:

$$i = (1 + i)\ \sqrt[n]{I_{Иn}} - 1 = (1 + 0,12)\ \sqrt[3]{2,2} - 1 = 0,4566\ (45,66\%).$$

Наращенная сумма долга:

$$S = 12\ 000 \cdot (1 + 0,4566)^3 = 37\ 085,33 \text{ руб.}$$

Найдем номинальную ставку сложных процентов, учитывающую инфляцию:

$$(1 + j_\alpha / m)^{mn} = (1 + j / m)^{mn} \cdot I_n,$$

выполнив преобразования, получим:

$$j_\alpha = m(1 + j / m) \cdot \sqrt[mn]{I_n} - 1.$$

Пример 8.4. При уровне инфляции 80% в год капитал вкладывается на один год под номинальную ставку 50%, начисление процентов — ежемесячное. Какова реальная доходность этой операции?

Решение. По условию $n = 1$, $m = 12$, $\alpha = 0,8$, $I = 1,8$, $j = 0,5$. Нам нужно найти безынфляционную номинальную ставку сложных процентов, чтобы оценить реальную доходность операции. Из уравнения

$$(1 + j_\alpha / m)^{mn} = (1 + j / m)^{mn} \cdot I_n$$

находим j:

$$j = m\left(\frac{1 + j_\alpha / m}{\sqrt[mn]{I_n}}\right) - 1 = 12 \cdot \left(\frac{1 + 0,5/12}{\sqrt[12]{1,8}} - 1\right) = -0,0975\ (-9,75\%).$$

Вывод: финансовая операция убыточна.

9. ФИНАНСОВАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ОБЯЗАТЕЛЬСТВ

Две суммы денег S_1 и S_2, выплачиваемые в разные моменты времени, считаются эквивалентными, если их современные стоимости, рассчитанные по одной и той же процентной ставке на один момент времени, одинаковы.

Пример 9.1. Имеются два обязательства. Условия первого — выплатить 400 руб. через четыре месяца; условия второго — выплатить 450 руб. через восемь месяцев. Можно ли считать их равноценными?

Решение. Применим простую ставку, так как платежи краткосрочные. Возьмем ставку сравнения 12%. Тогда современные стоимости этих платежей:

$$P_1 = \frac{400}{1+0{,}12\cdot\frac{4}{12}} = 384{,}62 \text{ руб.}; \quad P_2 = \frac{450}{1+0{,}12\cdot\frac{8}{12}} = 416{,}67 \text{ руб.}$$

Сравниваемые обязательства не являются эквивалентными при заданной ставке и не могут заменять друг друга.

Результат сравнения зависит от некоторой ставки. Существует критическая ставка i_0, при которой $P_1 = P_2$. Отсюда:

$$\frac{S_1}{1+i_0 n_1} = \frac{S_2}{1+i_0 n_2} \text{ и } i_0 = \frac{1-\frac{S_1}{S_2}}{\frac{S_1}{S_2}\cdot n_2 - n_1}.$$

Для рассмотренного выше примера i_0 = 42,86%. Соотношение $P_1 < P_2$ справедливо для $i <$ 42,86%; $P_1 > P_2$ при $i >$ 42,86%.

Задание.

Найти критическую ставку, если дисконтирование производится по сложной ставке (самостоятельно).

10. КОНСОЛИДАЦИЯ ПЛАТЕЖЕЙ

Пусть платежи S_1, S_2, ..., S_m со сроками уплаты n_1, n_2, ..., nm заменяются одним в сумме S_0 и сроком n_0. Решим задачу: задан срок n_0, найти сумму консолидированного платежа.

Применим простые процентные ставки. Запишем уравнение эквивалентности:

$$S_0 = \sum_j S_j(1+(n_0 - n_j)i) + \sum_k \frac{S_k}{1+(n_k - n_0)i},$$

где S_j — размеры объединяемых платежей со сроками $n_j < n_0$;
S_k — размеры платежей со сроками $n_k > n_0$.

В частном случае, когда $n_0 > n_o$, $(j = \overline{1,m})$,

$$S_0 = \sum_j S_j(1+(n_0 - n_j)i).$$

Пример 10.1. Два платежа 1000 руб. и 500 руб. со сроками уплаты соответственно 150 и 180 дней объединяются в один со сроком 200 дней. Пусть стороны согласились на применение простой ставки, равной 10% годовых. Найдите консолидированную сумму долга. $K = 365$.

Решение. Консолидированная сумма долга составит:

$$S_0 = 1000 \cdot \left(1 + \frac{200-150}{365} \cdot 0{,}1\right) + 500 \cdot \left(1 + \frac{200-180}{365} \cdot 0{,}1\right) = 1516{,}44 \text{ руб.}$$

При объединении обязательств можно применить сложные ставки. В этом случае уравнение эквивалентности имеет вид:

$$S_0 = \sum_j S_j(1+i)^{n_0 - n_j} + \sum_k \frac{S_k}{(1+i)^{n_j - n_0}}.$$

Пример 10.2. Платежи в 1 000 руб. и 2 000 руб. со сроками уплаты два и три года объединяются в один со сроком 2,5 года. При консолидации используется сложная ставка 20%. Найдите сумму консолидированного платежа.

Решение. Сумма консолидированного платежа составит:

$$S_0 = 1000 \times 1{,}2^{0{,}5} + 2000 \times 1{,}2^{-0{,}5} = 2921{,}19 \text{ руб.}$$

Пример 10.3. Имеются два кредитных обязательства — 500 руб. и 600 руб. со сроками уплаты 1.10 и 1.01 (нового года). По согласованию сторон обязательства были пересмотрены на новые условия: первый платеж в размере 700 руб. должник вносит 1.02, остальной долг он выплачивает 1.04. При расчетах используется простая процентная ставка — 10% годовых. Необходимо определить величину второго платежа — S_0.

Р е ш е н и е. За базовую дату, т. е. за дату приведения, примем 01.01 (нового года).

01.10 — 274-й порядковый день в году;

01.01 — 356-й или 1-й день в новом году;

01.02 — 32-й день в году;

01.04 — 91-й день.

Запишем уравнение эквивалентности:

$$500\cdot(1+\frac{92}{365}\cdot 0{,}1)+600=\frac{700}{(1+\frac{31}{365}\cdot 0{,}1)}+\frac{S_0}{(1+\frac{90}{365}\cdot 0{,}1)}.$$

Решая уравнение, найдем, что $S_0 = 428{,}82$ руб.

За базу можно принять и другую дату, например 1.04. Тогда $S_0 =$ $= 428{,}41$ руб.

Отличие результатов, полученных при расчете S_0 на различные даты, неизбежно и обусловлено соотношением:

$$1 + ni \neq (1 + n_1 i)(1 + n_2 i),$$

где $n = n_1 + n_2$.

Задание.

При консолидации векселей в расчетах чаще всего используется учетная ставка. Записать уравнение эквивалентности для этого случая.

11. АННУИТЕТЫ (финансовые ренты)

Поток платежей, все члены которого положительные величины, а временные интервалы между платежами одинаковы, называют аннуитетом или финансовой рентой.

Например, аннуитетом является последовательность получения процентов по облигации, платежи по потребительскому кредиту, регулярные взносы в пенсионный фонд и т.д.

Аннуитет характеризуется следующими параметрами:

1) величиной каждого отдельного платежа;

2) интервалом между платежами;

3) сроком от начала аннуитета до его конца (бывают вечные аннуитеты);

4) процентной ставкой.

Введем обозначения:

R — величина годового платежа в аннуитете;

i — процентная ставка сложных процентов, используемая для расчета наращения или дисконтирования платежей;

A_k — современная стоимость k-го платежа;

A — современная стоимость всего аннуитета;

S_k — будущая стоимость k-го платежа;

S — будущая стоимость всего аннуитета.

Обобщающими показателями аннуитета являются: современная стоимость всего аннуитета A и будущая стоимость всего аннуитета S.

Наращенная сумма — сумма всех членов потока платежей с начисленными на них процентами на конец срока:

$$S = \sum_{k=1}^{n} S_k .$$

Современная стоимость — сумма современных стоимостей членов потока платежей:

$$A = \sum_{k=1}^{n} A_k .$$

Рассмотрим аннуитет постнумерандо, в котором платежи производятся в конце периодов. На вносимые платежи один раз в год начисляются проценты. Будущие стоимости членов аннуитета:

$$S_1 = R(1+i)^{n-1};\ S_2 = R(1+i)^{n-2};\ ...;\ S_n = R .$$

Будущая стоимость аннуитета:

$$S = \sum_{k=1}^{n} S_k = R + R(1+i) + ... + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-1} =$$

$$= R\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Величину $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ называют коэффициентом наращения аннуитета, его обозначение — $FVIFA$ (Future Value of Interest Factor of

Annuity). Значения коэффициента наращения табулированы (см. приложение IV).

Итак, наращенная сумма аннуитета постнумерандо:

$$S = R \cdot FVIFA_{i,n}.$$

Если платежи производятся в начале периодов, то речь идет об аннуитете пренумерандо.

Формула расчета наращенной суммы аннуитета пренумерандо имеет вид:

$$S' = \sum_{k=1}^{n} S_k = R(1+i) + R(1+i)^2 + ... + R(1+i)^n =$$

$$= R\frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i) = R \cdot FVIFA_{i,n} \cdot (1+i).$$

Таким образом:

$$S' = S(1 + i).$$

Если платежи вносятся в середине периода, то наращенная сумма аннуитета:

$$S'' = S(1+i)^{1/2}.$$

Современная стоимость аннуитета постнумерандо:

$$A = \sum_{k=1}^{n} A_k = R \cdot \left(\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + ... + \frac{1}{(1+i)^n} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{R}{(1+i)^k} = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Величина $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ называется коэффициентом приведения аннуитета, его обозначение — $PVIFA_{i,n}$ (Present Value of Interest Factor of Annuity). Коэффициенты приведения аннуитета табулированы (см. прил.V).

Итак, формула расчета современной стоимости аннуитета постнумерандо:

$$A = R \cdot PVIFA_{i,n}.$$

Аналогично современная стоимость аннуитета пренумерандо:

$$A' = \sum_{k=1}^{n} A_k = R \cdot \left(1 + \frac{1}{(1+i)^1} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right) =$$

$$= R \cdot PVIFA_{i,n} \cdot (1+i) = A(1+i) \ .$$

Между наращенной и современной стоимостью аннуитета постнумерандо существует следующая зависимость:

$$A(1+i)^n = S \ .$$

Это означает, что если мы внесем в банк разовый платеж величиной А, то через n лет мы будем иметь наращенную сумму S, т. е. аннуитет можно заменить разовым платежом.

Если платежи вносятся в середине периода, то современная стоимость:

$$A'' = A(1+i)^{1/2}.$$

Пример 11.1. Определить современную стоимость и наращенную сумму аннуитета постнумерандо. Срок ренты — пять лет, разовый платеж 4000 руб. вносится ежегодно. На поступившие взносы начисляются проценты по сложной ставке 8% годовых.

Р е ш е н и е. Современная стоимость аннуитета:

$$A = 4000 \times PVIFA_{8\%};\ 5 = 4000 \times 3{,}99271 = 15\ 970{,}84 \text{ руб.}$$

Будущая (наращенная) стоимость ренты:

$$S = 4000 \times FVIFA_{8\%};\ 5 = 4000 \times 5{,}866601 = 23\ 466{,}40 \text{ руб.}$$

Зная будущую стоимость аннуитета, ставку i, можно найти срок аннуитета. Так, например, преобразовав выражение

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

получим:

$$\frac{S}{R} \cdot i + 1 = (1+i)^n .$$

Прологарифмируем это равенство:

$$n \cdot \ln(1+i) = \ln\left(\frac{S}{R} \cdot i + 1\right).$$

Отсюда найдем срок аннуитета:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R} \cdot i + 1\right)}{\ln(1+i)}.$$

Пример 11.2. Фирма предполагает создать специальный фонд в размере 200 тыс. руб., для чего будет вносить в банк 50 тыс. руб. под 15% годовых. Определить срок, необходимый для создания фонда.

Решение. Найдем срок аннуитета:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{200}{50} \cdot 0{,}15 + 1\right)}{\ln(1 + 0{,}15)} \approx 3{,}363 \text{ года.}$$

Округляем срок кредита до $n = 3$. Тогда через три года наращенная сумма составит:

$$S = 50 \times FVIFA_{15\%;3} = 173{,}625 \text{ тыс. руб.}$$

Наращенная сумма меньше 200 тыс. руб. Если фирме нужно создать фонд не менее 200 тыс. руб. за три года, следует увеличить размер рентного платежа.

Из равенства

$$200 = R \times FVIFA_{15\%,\,3}$$

находим величину рентного платежа: $R = 57{,}595$ тыс. руб.

11.1. Годовой аннуитет

Начисление процентов *m* раз в году. Рассмотрим годовую ренту постнумерандо. Проценты начисляются m раз в году. Члены ренты с начисленными к концу срока процентами образуют ряд (перепишем его в обратном порядке):

$$R,\ R(1+j/m)^m,\ R(1+j/m)^{2m},\ \ldots,\ R(1+j/m)^{(n-1)m},$$

где j — номинальная ставка процентов.

Мы имеем дело с возрастающей геометрической прогрессией. Первый член прогрессии равен R, знаменатель — $(1+j/m)^m$. Число членов — n. Сумма членов этой прогрессии равна наращенной сумме аннуитета:

$$S = R\cdot\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{(1+j/m)^m-1} = R\cdot\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{j/m}\cdot\frac{j/m}{(1+j/m)^m-1} =$$

$$= \frac{R\cdot FVIFA_{j/m;mn}}{FVIFA_{j/m;m}}.$$

Для ренты пренумерандо наращенная сумма аннуитета:

$$S' = S(1+j/m)^m.$$

Современная стоимость аннуитета постнумерандо:

$$A = \frac{R}{(1+j/m)^m}+\frac{R}{(1+j/m)^{2m}}+...+\frac{R}{(1+j/m)^{nm}} = R\cdot\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{(1+j/m)^m-1} =$$

$$= \frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{j/m}\cdot\frac{j/m}{(1+j/m)^m-1} = R\cdot\frac{PVIFA_{j/m;mn}}{FVIFA_{j/m;n}}.$$

Современная стоимость аннуитета пренумерандо:

$$A' = A(1+j/m)^m.$$

Между наращенной и современной стоимостью аннуитета постнумерандо существует следующая зависимость:

$$A\cdot(1+j/m)^{mn} = S.$$

***p* — срочная рента.** Рента называется p-срочной, если рентные платежи вносятся несколько раз (p раз) в году. Найдем наращенную сумму S p-срочной ренты постнумерандо при начислении процентов один раз в году. Общее число членов ренты равно np. Ряд членов ренты с начисленными процентами представляют собой геометрическую прогрессию. Первый ее член равен R/p, а знаменатель — $(1+i)^{1/p}$.

Тогда:

$$S=\frac{R}{p}+\frac{R}{p}\cdot(1+i)^{1/p}+\frac{R}{p}\cdot(1+i)^{2/p}+...+\frac{R}{p}\cdot(1+i)^{(np-1)/p}=$$

$$=\frac{R}{p}\cdot\frac{\left((1+i)^{n}-1\right)}{(1+i)^{1/p}-1}.$$

Наращенная сумма p-срочной ренты пренумерандо:

$$S'=S(1+i)^{1/p}.$$

При начислении рентных платежей p раз в году с начислением процентов m раз в году при условии $p\neq m$:

$$S=\frac{R}{p}\cdot\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{(1+j/m)^{m/p}-1};\ S'=S(1+i)^{m/p};$$

если $p=m$; то:

$$S=\frac{R}{p}\cdot\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{j/m}=\frac{R}{p}\cdot FVIFA_{j/m;mn},$$

$$S'=S(1+j/m);$$

где R — сумма рентных платежей за год.

Современная стоимость аннуитета постнумерандо:

$$A=\frac{R}{p(1+i)^{1/p}}+\frac{R}{p(1+i)^{2/p}}+...+\frac{R}{p(1+i)^{np/p}}=\frac{R}{p}\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1},$$

$$A'=A(1+i)^{1/p}.$$

Расчет современной величины p-срочной ренты с начислением процентов m раз в году при условии $p\neq m$ находится по формуле:

$$A=\frac{R}{p}\cdot\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{(1+j/m)^{m/p}-1};\ A'=A(1+i)^{m/p};$$

если $p=m$:

$$A=\frac{R}{p}\cdot\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{j/m}=\frac{R}{p}\cdot PVIFA_{j/m;mn}.$$

Современная стоимость p-срочной ренты пренумерандо:

$$A' = A(1 + j/m).$$

Непрерывное начисление процентов. Рентные платежи вносятся один раз в год, в конце года. Перепишем в обратном порядке ряд платежей с начисленными непрерывными процентами. Получим:

$$R, Re^{\sigma}, Re^{2\sigma}, \ldots, Re^{(n-1)\sigma}.$$

Просуммировав члены этой прогрессии, мы найдем наращенную сумму:

для ренты постнумерандо:

$$S = \frac{R(e^{\sigma n} - 1)}{e^{\sigma} - 1};$$

для ренты пренумерандо:

$$S' = Se^{\sigma};$$

для p-срочной ренты:

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{e^{\sigma n} - 1}{e^{\sigma/p} - 1}; \quad S' = Se^{\sigma/p};$$

современную стоимость

ренты постнумерандо:

$$A = \frac{R}{e^{\sigma}} + \frac{R}{e^{2\sigma}} + \ldots + \frac{R}{e^{n\sigma}} = R \cdot \frac{1 - e^{-\sigma n}}{e^{\sigma} - 1};$$

ренты пренумерандо:

$$A' = Ae^{\sigma};$$

p-срочной ренты:

$$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - e^{-\sigma n}}{e^{\sigma/p} - 1}; \quad A' = Ae^{\sigma/p}.$$

Вечная рента (бессрочный аннуитет). Рассмотрим случай, когда рента не ограничена во времени и имеет неограниченное число членов, т. е. она является вечной рентой. Примером вечной ренты являет-

ся выпуск облигационных займов без ограничения срока погашения. В западной практике к бессрочным относятся аннуитеты, рассчитанные на 50 лет и более.

Пусть A — это долг, который нужно погасить за бесконечное число лет при существующей процентной ставке i. Тогда

$$A = \lim_{n\to\infty} R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{R}{i}.$$

Таким образом, величина годового платежа:

$$R = A \cdot i.$$

Если вы взяли в долг 10 000 руб. под 10% годовых с условием, что его погашать не будете, а будете выплачивать рентные платежи в течение большого периода времени, то ежегодно вам придется платить 10 000 × 0,1= 1000 руб.

Пример 11.3. Определить текущую (современную) стоимость бессрочного аннуитета с ежегодным поступлением 400 руб., если предлагаемый государственным банком процент по срочным вкладам равен 10% годовых.

Решение. Текущая стоимость аннуитета составит:

$$A = R / i = 400 / 0{,}1 = 4000 \text{ руб.}$$

Таким образом, если аннуитет предлагается по цене, не превышающей 4000 руб., он представляет собой выгодную инвестицию.

Для общего случая ренты, когда число рентных платежей $p > 1$, современная стоимость:

$$A_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{R}{p} \cdot \frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{(1+j/m)^{m/p}-1} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1}{(1+j/m)^{m/p}-1},$$

если $p = m$, то

$$A_\infty = R / j.$$

Пример 11.4. Принято решение о выкупе облигаций государственного бессрочного займа, по которому на каждую облигацию выплачивались доходы в размере 20 руб. дважды в год — в конце каждого по-

лугодия, а доходность облигации составляла 5% годовых. Определить сумму, подлежащую выплате на каждую облигацию.

Р е ш е н и е. Сумма, подлежащая выплате, равна современной стоимости бессрочного займа:

$$A_{\infty} = \frac{40}{2((1+0{,}05)^{1/2}-1)} = 809{,}88 \text{ руб.}$$

Отложенная рента. Рассмотрим расчет современной величины для отложенных рент, т. е. таких, срок реализации которых откладывается на время, указанное в контракте.

Современная стоимость отложенной ренты является дисконтированной величиной современной стоимости немедленной ренты по принятой для нее процентной ставке. Период отсрочки выплаты рентных платежей и процентная ставка служат основанием для определения величины дисконтного множителя.

Современная величина отложенной ренты определяется по формуле:

$$A_t = A \times v^t,$$

где A_t — современная величина отложенной ренты;

A — современная величина немедленной ренты;

$v^t = \dfrac{1}{(1+i)^t}$ — дисконтный множитель за t лет.

Пример 11.5. Строительной фирмой заключен контракт на строительство здания. Согласно контракту заказчик через два года после окончания строительства производит оплату в течение трех лет равными годовыми платежами, производимыми в конце года, в размере 25 тыс. руб. каждый. Процентная ставка установлена в 10% годовых; проценты начисляются в конце года. Определить выигрыш заказчика, полученный в результате отсрочки платежа на два года.

Р е ш е н и е. Современная стоимость немедленной ренты:

$$A = R \times PVIFA_{10\%;\,3} = 25 \times 2{,}4868520 = 62{,}171 \text{ тыс. руб.}$$

Современная стоимость отложенной ренты:

$$A_t = A\,\frac{1}{(1+i)^2} = \frac{62{,}1713}{1{,}1^2} = 51{,}381 \text{ тыс. руб.}$$

Выигрыш заказчика:

$$62,17130 - 51,38124 = 10,790 \text{ тыс. руб.}$$

11.2. Конверсия финансовых рент

На практике может возникнуть ситуация, когда один из партнеров, участвующих в сделке, предлагает изменить условия оплаты: разовый платеж заменить на рентные платежи или наоборот. К более сложным случаям относятся: объединение рент в одну — консолидация рент; замена ренты с одними условиями на ренту с другими условиями, например немедленной ренты на отложенную и т. д. Все перечисленные изменения не могут быть произвольными. Если предполагается, что конверсия не должна приводить к изменению финансовых последствий, то ее необходимо основывать на принципе финансовой эквивалентности.

Платежи считаются эквивалентными, если, будучи приведены к одному моменту, они будут иметь одинаковую стоимость.

Рассмотрим некоторые случаи конверсии.

1. *Выкуп ренты.* Аннуитет с параметрами R, i, n заменяют разовым платежом. Решение проблемы простое. Размер выкупа должен быть равен современной стоимости ренты:

$$A = R \times PVIFA_{i,n}.$$

2. *Задача, обратная выкупу ренты.* Если есть обязательство уплатить некоторую крупную сумму, то задолженность можно погашать частями — в рассрочку.

Величина отдельного платежа равна:

$$R = A \,/\, PVIFA_{i,n},$$

где A — величина долга.

Величина $1 \,/\, PVIFA_{i,n}$ называется коэффициентом рассрочки.

3. *Изменение продолжительности ренты.* При замене обычной годовой ренты на новую с изменением срока ренты необходимо определить размер нового рентного платежа. Уравнение эквивалентности имеет вид:

$$R_1 \cdot PVIFA_{i,n_1} = R_2 \cdot PVIFA_{i,n_2}.$$

Тогда величина рентного платежа новой ренты составит:

$$R_2 = \frac{R_1 \cdot PVIFA_{i,n_1}}{PVIFA_{i,n_2}} = R_1 \cdot \frac{1-(1+i)^{-n_1}}{1-(1+i)^{-n_2}}.$$

Пример 11.6. Первоначальный аннуитет имеет параметры R_1 = = 2 тыс. руб.; i = 9%; n_1 = 5 лет. Он заменяется на ренту с параметрами: R_2; i = 9%; n_2 = 8 лет. Найти R_2.

Решение. Размер нового рентного платежа:

$$R_2 = \frac{R_1 \cdot PVIFA_{9\%,5}}{PVIFA_{9\%,8}} = 2 \cdot \frac{3{,}8896513}{5{,}5348191} \approx 1{,}405 \text{ тыс. руб.}$$

4. *Замена немедленной ренты на отсроченную.* Пусть имеется аннуитет с параметрами R, i, n_1. Необходимо отсрочить выплаты на t лет. Мы будем иметь новую ренту с параметрами R_2, i, n_2 (t не входит в срок ренты). Запишем уравнение эквивалентности:

$$R_1 \cdot PVIFA_{i,n_1} = R_2 \cdot PVIFA_{i,n_2} \cdot \frac{1}{(1+i)^t}.$$

Отсюда:

$$R_2 = \frac{R_1 \cdot PVIFA_{i,n_1}}{PVIFA_{i,n_2}} \cdot (1+i)^t.$$

Если $n_1 = n_2$, то:

$$R_2 = R_1 \cdot (1+i)^t.$$

Пример 11.7. Пусть немедленная рента постнумерандо с ежегодным платежом R_1 = 2 тыс. руб., i = 9% откладывается на два года без изменения срока самой ренты. Как изменится размер ежегодного платежа?

Решение. Размер ежегодного платежа:

$$R_2 = 2 \times 1{,}09^2 = 2{,}376 \text{ тыс. руб.}$$

Если же срок первоначальной ренты n_1 = 5 увеличить на один год (n_2 = 6), то размер ежегодного платежа составит:

$$R_2 = \frac{R_1 \cdot PVIFA_{9\%,5}}{PVIFA_{9\%,6}} \cdot (1+0{,}09)^2 = 2 \cdot \frac{3{,}8896513}{4{,}4859186} \cdot 1{,}09^2 \approx 2{,}0604 \text{ тыс. руб.}$$

Рассмотрим еще один вариант. Аннуитет с параметрами R, i, n_1 откладывают на t лет, член ренты остается без изменения, срок ренты меняется, причем $n_2 > n_1$. Нужно найти срок новой ренты n_2.

Составляем уравнение эквивалентности:

$$R \cdot PVIFA_{i,n_1} = R \cdot PVIFA_{i,n_2} \cdot \frac{1}{(1+i)^t}.$$

Отсюда:

$$\frac{1-(1+i)^{-n_2}}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n_1}}{i} \cdot (1+i)^t.$$

Решая это уравнение относительно n_2, найдем срок новой ренты:

$$n_2 = -\frac{\ln(1-(1-(1+i)^{-n_1}) \cdot (1+i)^t)}{\ln(1+i)}.$$

Пример 11.8. Рента с параметрами R = 2 тыс. руб., n_1 = 5 лет, i = = 9% откладывается на два года без изменения размера ежегодного платежа. Необходимо найти новый срок и сбалансировать результат.

Р е ш е н и е. По последней формуле найдем n_2:

$$n_2 = -\frac{\ln(1-(1-1{,}09^{-5}) \cdot 1{,}09^2)}{\ln 1{,}09} = -\frac{-0{,}537711361}{0{,}086177696} \approx 6{,}24 \text{ года.}$$

Продолжительность новой ренты (без учета отсрочки) — шесть лет. Современная стоимость такой ренты:

$$A_2 = R \cdot PVIFA_{9\%,6} \cdot \frac{1}{(1+i)^2} = 2 \cdot 4{,}4859186 \cdot \frac{1}{1{,}09^2} \approx 7{,}551 \text{ тыс. руб.}$$

Современная стоимость заменяемой ренты:

$$A_1 = R \cdot PVIFA_{9\%,5} = 2 \cdot 3{,}8896513 \approx 7{,}779 \text{ тыс. руб.}$$

Разность в сумме 0,22788 тыс. руб. следует уплатить в начале действия контракта или с соответствующим наращением в любой иной момент.

11.3. Консолидация рент

Консолидация рент — объединение нескольких рент в одну, основанное на принципе финансовой эквивалентности. Современная ве-

личина вновь образованной консолидированной ренты А должна быть равна сумме современных величин объединяемых рент A_k, $k=\overline{1,m}$. Объединяемые ренты могут быть любыми: немедленными и отсроченными, годовыми и p-срочными и т. д.

Если объединяются годовые ренты, то легко можно найти размер годового платежа объединенного аннуитета из равенств:

$$R = \frac{\sum_{k=1}^{m} R_k \cdot PVIFA_{i_k,n_k}}{PVIFA_{i,n}}.$$

Отсюда размер годового платежа объединенного аннуитета:

$$R = \frac{\sum_{k=1}^{m} R_k \cdot PVIFA_{i_k,n_k}}{PVIFA_{i,n}}.$$

Пример 11.9. Объединяются три аннуитета с параметрами:

$R_1 = 1000$; $n_1 = 10$; $i_1 = 0{,}06$;

$R_2 = 500$; $n_2 = 8$; $i_2 = 0{,}05$;

$R_3 = 2000$; $n_3 = 12$; $i_3 = 0{,}05$.

Требуется заменить эти три ренты аннуитетом с параметрами $n = 10$; $i = 0{,}06$. Определить размер годового платежа.

Р е ш е н и е. Находим современные стоимости A_1, A_2, A_3 трех рент:

$A_1 = R_1 \times PVIFA_{6\%,\,10} = 1000 \times 7{,}3600871 = 7360{,}09$ руб.;

$A_2 = R_2 \times PVIFA_{5\%,\,8} = 500 \times 6{,}4632128 = 3231{,}61$ руб.;

$A_3 = R_3 \times PVIFA_{5\%,\,12} = 2000 \times 8{,}8632516 = 17726{,}50$ руб.

Современная стоимость объединенного аннуитета:

$A = A_1 + A_2 + A_3 = 28\,318{,}20$ руб.

Теперь найдем размер годового платежа объединенного аннуитета:

$R = A/PVIFA_{6\%,\,10} = 28\,318{,}1967 \,/\, 7{,}3600871 = 3847{,}54$ руб.

Какой вариант выгоднее?

Задачи для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Семья хочет накопить 12 000 долл. на машину, вкладывая в банк 1000 долл. ежегодно. Годовая ставка процентов в банке — 7%. Как долго ей придется копить?

2. Заем был взят под 16% годовых, выплачивать осталось ежеквартально по 500 д.е. в течение двух лет. Из-за изменения ситуации в стране процентная ставка снизилась до 6% годовых. В банке согласились с необходимостью пересчета ежеквартальных выплат. Каков должен быть размер выплаты?

3. Годовая ставка простых процентов равна 12,5%. Через сколько лет начальная сумма удвоится?

4. Наращение сложных процентов с переменной ставкой. Пусть сложные проценты за k-й год равны i_k. Найдите наращенную сумму через n лет.

5. Покупатель предложил два варианта расчетов при покупке дачи:

1) 5000 долл. немедленно, затем 1000 долл. в течение пяти лет;

2) 8000 долл. немедленно и по 300 долл. в течение пяти лет.

Какой вариант выгоднее при годовой ставке 10%?

Вариант 2

1. Обоснуйте решение, что выгоднее — купить оборудование стоимостью 20 000 долл. или арендовать его на восемь лет с ежегодным арендным платежом 3000 долл., если ставка процентов — 6%, а норматив доходности — 15%.

2. Семья хочет через шесть лет купить дачу за 12 000 долл. Какую сумму (равномерно) ей нужно каждый год из этих шести лет добавлять на счет в банке, если годовая ставка — 8%?

3. Покупатель предложил два варианта расчета при покупке квартиры:

1) 5000 долл. немедленно и затем 1000 долл. в течение пяти лет;

2) 8000 долл. немедленно и затем по 300 долл. в течение пяти лет.

Какой вариант выгоднее при годовой ставке 5%?

4. Наращение простых процентов за k-й год равны i_k. Найдите наращенную сумму через n лет.

5. Годовая ставка сложных процентов равна 8%. Через сколько лет начальная сумма удвоится?

Вариант 3

1. Каким должен быть платеж конечной годовой ренты длительностью восемь лет, чтобы ее современная величина была 16 000 руб. при ставке 10% годовых.

2. Сын в банке имел на счете 50 000 руб., на которые ежемесячно начислялось 0,8%. Сын уехал в командировку за границу, доверив отцу за 10 лет истратить весь его счет. Сколько будет получать в месяц отец?

3. Какая сумма предпочтительнее при ставке 6%: 1000 долл. сегодня или 2000 долл. через восемь лет?

4. Замените годовую десятилетнюю ренту с годовым платежом 1000 долл. на ренту с полугодовым платежом по 600 долл. Годовая ставка процентов 8%. Определить период ренты.

5. Как найти инфляцию за квартал, если известна годовая?

Вариант 4

1. Замените 10-летнюю годовую ренту с годовым платежом 600 долл. на семилетнюю. Ставка — 8% в год.

2. Найдите несколько сумм в прошлом и будущем, эквивалентных сумме 1000 ед. в момент 0 при ставке 8% годовых.

3. В ходе судебного заседания выяснилось, что по вине Пенсионного фонда г. N в течение 10 лет недоплачивали 100 руб. пенсии ежемесячно. Суд обязал фонд выплатить всю задолженность с процентами (12% годовых). Какова сумма выплаты?

4. Счет «СБ 100» в Сбербанке обещает 2,9% за 100 дней. Сколько это составит годовых?

5. В ходе судебного заседания выяснилось, что г. N недоплачивал налогов 100 руб. ежемесячно. Налоговая инспекция хочет взыскать недоплаченные за последние два года налоги вместе с процентами (3% ежемесячно). Какую сумму заплатит г. N?

Вариант 5

1. По договору зафиксирован платеж через три года в размере 1000 ед. Через год процентная ставка увеличилась. Кому это выгодно:

а) тому, кому будут платить;

б) тому, кто будет платить?

2. Для мелиоративных работ государство перечисляет фермеру 500 долл. в год. Деньги поступают на специальный счет и на них на-

числяют каждые полгода 4% годовых (проценты сложные). Сколько накопится на счете через пять лет?

3. Какую ставку должен назначить банк, чтобы при годовой инфляции 12% реальная ставка оказалась 6%?

4. Каждые полгода на банковский счет писателя издательство перечисляет 2000 руб., на которые банк начисляет каждые полгода 7% годовых (проценты сложные). Сколько будет на счете через четыре года?

5. Покупатель предложил два варианта расчета при покупке квартиры при годовой ставке — 5%:

1) 5000 долл. немедленно и затем 1000 долл. в течение пяти лет;

2) 8000 долл. немедленно и затем по 300 долл. в течение пяти лет.

Какой вариант выгоднее?

Раздел II
ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ КОЛИЧЕСТВЕННОГО ФИНАНСОВОГО АНАЛИЗА

12. МЕТОДЫ ПОГАШЕНИЯ ДОЛГОВ

Любой вид долгосрочного долга будем называть займом или долгом. Существует следующая классификация займов:

1. *Займы без обязательного погашения.* Взятая в долг сумма не возвращается, но проценты по займу выплачиваются неограниченно долгое время. Такой вид займа описывает механизм вечной ренты. Величина годового платежа:

$$R = Ai.$$

2. *Займы с обязательным погашением в один срок.* Основная сумма долга выплачивается разовым платежом. Проценты кредитору могут выплачиваться разными способами.

3. *Займы с погашением в несколько сроков.*

Рассмотрим второй вид займов. Если по условиям займа должник обязуется вернуть сумму долга D в конце срока в виде разового платежа, то он должен предпринять меры для обеспечения этого. При значительной сумме долга это обычно создание погасительного фонда. Ежегодно в погасительный фонд вносится сумма R, на которую начисляются проценты по ставке i. Одновременно происходит выплата процентов за долг по ставке g (простые проценты). В этом случае срочная уплата:

$$Y = Dg + R.$$

Поскольку фонд должен быть накоплен за n лет, соответствующие взносы образуют постоянную ренту с параметрами R, n, i. Допустим, что речь идет о ренте постнумерандо. Тогда срочная уплата:

$$Y = Dg + \frac{D}{FVIFA_{i,n}},$$

т.е. в фонд систематически вносится сумма, равная

$$R = \frac{D}{FVIFA_{i,n}}.$$

Если условия контракта предусматривают присоединение процентов к сумме основного долга, то срочная уплата определяется следующим образом:

$$Y = \frac{D(1+g)^n}{FVIFA_{i,n}}.$$

Пример 12.1. Долг в сумме 100 тыс. руб. выдан на пять лет под 4% годовых. Для его погашения создается погасительный фонд. На инвестируемые в нем средства начисляются проценты по ставке i = 5%. Разработать план погашения долга.

Решение. Пусть фонд формируется пять лет, взносы производятся в конце года равными суммами: D = 100; n = 5; g = 4%; i = 5%.

Находим срочную уплату:

$$Y = 100 \cdot 0{,}04 + \frac{100}{FVIFA_{5\%,5}} = 4 + \frac{100}{5{,}5256313} = 22{,}097 \text{ тыс. руб.}$$

Годовой платеж в погасительный фонд — R = 18,09748 тыс. руб.

План погашения долга, тыс. руб.:

Год	Взнос в погасительный фонд, R	Накопления в погасительном фонде	Проценты кредитору	Срочная уплата, Y
1-й	18,097	21,998	4	22,097
2-й	18,097	20,950	4	22,097
3-й	18,097	19,952	4	22,097
4-й	18,097	19,002	4	22,097
5-й	18,097	18,097	4	22,097

Σ = 100 тыс. руб.

Рассматриваем по-прежнему второй вид займов. Изменим немного условие. Ежегодно в погасительный фонд вносится сумма R, на ко-

торую начисляются проценты по ставке i. Одновременно происходит выплата процентов за долг по ставке g (проценты сложные). В этом случае срочная уплата:

$$Y_t = D(1+g)^{t-1} \cdot g + R,\ t = 1,2,...,n.$$

Здесь $D(1+g)^{t-1} \cdot g = I_t$ — процентный платеж, вычисленный по сложным процентам, $R = \frac{D}{FVIFA_{i,n}}$ — ежегодные взносы в погасительный фонд.

Пример 12.2. Фирма получила кредит 50 тыс. руб. на четыре года под 8% годовых (сложных проценты) в банке А. Кредитный контракт предусматривает погашение долга разовым платежом. Одновременно с получением кредита фирма начала создавать погасительный фонд, для чего открыла счет в банке Б. На размещенные средства банк Б начисляет 10% годовых. Определить ежегодные расходы фирмы по амортизации долга при условии, что в погасительный фонд вносятся ежегодно равные суммы.

Р е ш е н и е. Параметры финансовой операции: $D = 50$ тыс. руб.; $g = 8\%$; $i = 10\%$; $n = 4$. Взносы в погасительный фонд составят:

$$R = \frac{50}{FVIFA_{10\%,4}} = \frac{50}{4,641} = 10,774 \text{ тыс. руб.}$$

Рассчитаем выплаты процентных платежей по годам:

$$I_1 = 50\ (1+0,08)^{1-1} \times 0,08 = 4,0000 \text{ тыс. руб.};$$

$$I_2 = 50\ (1+0,08)^{2-1} \times 0,08 = 4,3200 \text{ тыс. руб.};$$

$$I_3 = 50\ (1+0,08)^{3-1} \times 0,08 = 4,6656 \text{ тыс. руб.};$$

$$I_4 = 50\ (1+0,08)^{4-1} \times 0,08 = 5,0388 \text{ тыс. руб.}$$

Накопления на конец года в погасительном фонде:

$$S_1 = R_1 = 10,7735 \text{ тыс. руб.};$$

$$S_2 = 10,7735 \times 1,1 + 10,7735 = 22,6244 \text{ тыс. руб.};$$

$$S_3 = 22,6244 \times 1,1 + 10,7735 = 35,6603 \text{ тыс. руб.};$$

$$S_4 = 35,6603 \times 1,1 + 10,7735 = 49,9998 \approx 50 \text{ тыс. руб.}$$

План погашения кредита, тыс. руб.:

Годы	Выплата процентных платежей	Взносы в погасительный фонд, R	Накопления в погасительном фонде, S_t	Срочные уплаты, Y_t
1-й	4,000	10,774	10,774	14,774
2-й	4,320	10,774	22,624	15,094
3-й	4,666	10,774	35,660	15,439
4-й	5,039	10,774	50,000	15,812

В рассматриваемом примере фирма-заемщик сумела с выгодой для себя реализовать кредитную операцию, так как она на взносы в погасительный фонд получила проценты более высокие, чем платила по займу ($i > g$). В результате общая сумма расходов по погашению долга составила 61,1186 тыс. руб., что значительно меньше, чем если бы фирма погасила долг разовым платежом:

$$\Delta D = 50 \cdot 1{,}08^4 - 61{,}1186 = 68{,}0244 - 61{,}1186 = 6{,}9058 \text{ тыс. руб.}$$

Создание погасительного фонда выгодно даже в том случае, если $i < g$. Предположим, что процентная ставка на взносы в погасительный фонд — i = 6%, остальные параметры финансовой операции — такие же, тогда расходы по амортизации займа составят 63,7428 тыс. руб., отсюда:

$$\Delta D = 50 \cdot 1{,}08^4 - 63{,}7428 = 4{,}2826 \text{ тыс. руб.}$$

Рассмотрим третий случай, когда долг погашается в несколько сроков.

В кредитном контракте может быть оговорено условие — производить погашение основного долга равными ежегодными платежами. В этом случае размеры платежей по основному долгу будут равны:

$$R = R_1 = R_2 = \ldots = R_n = D / n.$$

Остаток основного долга D_k в начале k-го расчетного периода определяется как

$$D_k = D - R(k-1).$$

Величина срочной уплаты в каждом расчетном периоде равна

$$Y_k = D / n + D_k \cdot g = D / n + [D - R(k-1)]g.$$

Пример 12.3. Кредит размером 30 тыс. руб. выдан на пять лет под 5% годовых. По условиям контракта погашение основного долга долж-

но производиться равными платежами, начисление процентов — в конце года. Составить план погашения кредита.

Р е ш е н и е. $R = 30/5 = 6$ тыс. руб. — годовая уплата основного долга. Годовые срочные уплаты:

$$Y_1 = 6 + (30 - 6 \times 0) \times 0{,}05 = 7{,}5 \text{ тыс. руб.};$$
$$Y_2 = 6 + (30 - 6 \times 1) \times 0{,}05 = 7{,}2 \text{ тыс. руб.};$$
$$Y_3 = 6 + (30 - 6 \times 2) \times 0{,}05 = 6{,}9 \text{ тыс. руб.};$$
$$Y_4 = 6 + (30 - 6 \times 3) \times 0{,}05 = 6{,}6 \text{ тыс. руб.};$$
$$Y_5 = 6 + (30 - 6 \times 4) \times 0{,}05 = 6{,}3 \text{ тыс. руб.}$$

План погашения долга, тыс. руб.:

Год	Долг D_k	Процентный платеж	Годовой расход по погашению основного долга	Годовая срочная уплата, Y
1-й	30	1,500	6	7,500
2-й	24	1,200	6	7,200
3-й	18	0,900	6	6,900
4-й	12	0,600	6	6,600
5-й	6	0,300	6	6,300
Итого		4,500	30	34,500

Величина процентного платежа для k-го расчетного периода определяется по формуле:

$$I_k = D_k \cdot i = (D - R(k-1)) \cdot i.$$

Этот метод погашения займа называется методом прямолинейного возвращения капитала.

12.1. Погашение долга равными срочными уплатами

Первый этап разработки плана погашения — определение размера срочной уплаты. Далее эта величина разбивается на процентные платежи и сумму, идущую на погашение долга. После этого легко найти остаток задолженности на любой промежуток времени.

Периодическая выплата постоянной суммы Y равнозначна ренте с параметрами: D, $R = Y$, g. Приравняв сумму долга к современной стоимости этой ренты, находим размер срочной уплаты:

$$Y = \frac{D}{PVIFA_{g,n}}.$$

Аннуитет Y содержит выплату основного долга и процентный платеж на остаток займа. Остаток долга уменьшается с каждой выплатой. Поэтому можно сделать вывод, что процентные платежи уменьшаются, а выплаты основного долга увеличиваются из периода в период.

Рассмотрим взаимосвязь между двумя выплатами займа. Если взять два следующих друг за другом расчетных периода k и $(k + 1)$ и если D_{k-1} — остаток долга в начале k-го периода, d_k и d_{k+1} — выплаты k-го и $(k+1)$-го периодов, то можно записать:

$$Y = D_{k-1}g + d_k;$$

$$Y = (D_{k-1} - d_k)g + d_{k-1}$$

или

$$D_{k-1}g + d_k = (D_{k-1} - d_k)g + d_{k+1}.$$

Откуда:

$$d_{k+1} = d_k(1 + g).$$

Следовательно, выплаты образуют геометрическую прогрессию и $(k + 1)$-я выплата будет равна:

$$d_{k+1} = d_1(1 + g)^k.$$

Таким образом, если заем погашается одинаковыми аннуитетами, выплаты растут в геометрической прогрессии.

Платежи по погашению долга образуют ряд:

$$d_1, d_1 \times (1 + g), ..., d_1 \times (1+g)^{n-1}.$$

Используя этот ряд, легко определить сумму погашенной задолженности на конец года t (после очередной выплаты):

$$W_t = \sum_{k=0}^{t-1} d_1 \cdot (1 + g)^k = d_1 \cdot FVIFA_{g,t}.$$

Пример 12.4. Кредит размером 30 тыс. руб. выдан на пять лет под 5% годовых. По условиям контракта погашение основного долга производится равными срочными уплатами, т.е. рентой с параметрами: Y (неизвестная величина), $n = 5$, $g = 5\%$.

Р е ш е н и е. Находим $PVIFA_{5\%,\,5}$ = 4,3294767. Размер срочной уплаты составит:

$$Y = \frac{D}{PVIFA_{5\%,5}} = \frac{30}{4{,}3294767} = 6{,}92924 \text{ тыс. руб.}$$

Первый платеж по погашению долга:

$$d_1 = Y - D \cdot g = 6{,}92924 - 30 \cdot 0{,}05 = 5{,}42924 \text{ тыс. руб.}$$

План погашения долга, тыс. руб.:

Годы	Остаток долга на начало года, D_k	Процентный платеж	Годовой расход по погашению основного долга, d_k	Годовая срочная уплата, Y = const
1-й	30,000	1,500	5,429	6,929
2-й	24,570	1,228	5,701	6,929
3-й	18,870	0,944	5,986	6,929
4-й	12,884	0,644	6,285	6,929
5-й	6,599	0,330	6,599	6,929

12.2. Погашение займа переменными выплатами основного долга

Рассмотрим случай, когда выплаты изменяются в геометрической прогрессии.

Одним из вариантов погашения кредитной задолженности может быть такой, при котором погашение основного долга должно производиться платежами, каждый из которых больше или меньше предыдущего в q раз. Таким образом, эти платежи будут являться членами возрастающей или убывающей геометрической прогрессии. Члены этой прогрессии будут иметь вид:

$$R_1,\ R_1q,\ R_1q^2,\ \ldots,\ R_1q^{n-1}.$$

Величина основного долга является суммой этих членов и определяется по формуле геометрической прогрессии, где R_1 — первый член прогрессии и одновременно первый платеж основного долга, а q — знаменатель прогрессии. Тогда основной долг:

$$D = R_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Решим это уравнение относительно R_1:

$$R_1 = D \cdot \frac{q-1}{q^n - 1}.$$

Пример 12.5. Кредит в размере 300 тыс. руб. должен быть погашен в течение шести лет ежегодными выплатами. Процентная ставка — 15% годовых, начисление процентов — один раз в конце года. Платежи, обеспечивающие погашение основного долга, должны увеличиваться в геометрической прогрессии на 5% ежегодно. Составить план погашения кредита.

Решение. По условию примера: $D = 300$; $n = 6$; $i = 0,15$; $q = 1,05$. Определим величину первого платежа:

$$R_1 = D \cdot \frac{q-1}{q^n - 1} = 300 \cdot \frac{1,05-1}{1,05^6 - 1} = 44,10524 \text{ тыс. руб.}$$

План погашения кредита, тыс. руб.:

Годы	Долги	Процентный платеж	Годовой расход по погашению долга $R_t = R_1 \cdot q^{t-1}$	Годовая срочная уплата
1	300,000	45,000	44,105	89,105
2	255,895	38,384	46,311	84,695
3	209,584	31,438	48,626	80,064
4	160,958	24,144	51,057	75,201
5	109,901	16,485	53,610	70,095
	56,291	8,444	56,291	64,734
Итого		163,894	300,000	463,894

Задание.

Самостоятельно рассмотреть случай, когда выплаты изменяются в арифметической прогрессии, и решить следующую задачу:

кредит размером 400 тыс. руб. выдан на пять лет под 15% годовых с начислением процентов в конце каждого года. Выплаты основного долга должны возрастать ежегодно на 10 тыс. руб. Составьте план погашения кредита.

13. ИПОТЕЧНЫЕ ССУДЫ

Ссуды под залог недвижимости, или ипотеки, получили широкое распространение в странах с развитой рыночной экономикой. В такой сделке владелец имущества получает ссуду у залогодержателя. В случае если владелец имущества отказывается от погашения ссуды или не полностью погашает задолженность, то залогодержатель имеет право возместить ущерб из стоимости заложенного имущества.

Характерной особенностью ипотечных ссуд является длительный срок погашения — в США до 30 и даже более лет.

Существует несколько видов ипотечных ссуд, которые различаются методами погашения задолженности.

13.1. Стандартная ипотека

Заемщик получает от залогодержателя (кредитора) некоторую сумму под залог недвижимости. Далее он погашает долг вместе с процентами равными, обычно ежемесячными, взносами. Взносы могут быть постнумерандо или пренумерандо. В договоре обычно устанавливается ежемесячная ставка процента, редко — годовая номинальная.

В осуществлении ипотеки при покупке (строительстве) объекта участвуют три агента: продавец, покупатель (должник), кредитор (рис. 13.1).

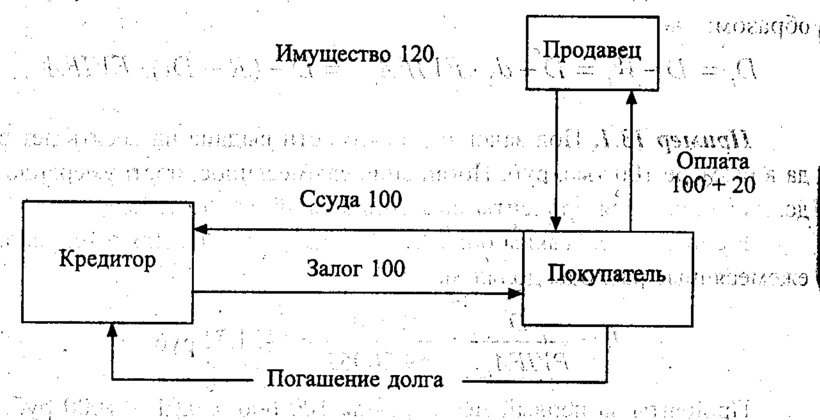


Рис. 13.1

Продавец получает от покупателя за некоторое имущество его стоимость (120). Для того чтобы расплатиться, покупатель получает ссуду

под залог этого имущества (100) и добавляет собственные средства (20). Задача заключается в определении размера ежемесячных погасительных платежей R и остатка задолженности на момент очередного ее погашения вплоть до полного погашения долга.

Пусть D — общая сумма ипотечного кредита, n — срок ипотеки в годах, погасительные платежи R вносятся ежемесячно, общее число платежей — $N = 12n$, i — месячная процентная ставка.

Размер одной срочной уплаты для ренты постнумерандо:

$$R = \frac{D}{PVIFA_{i,N}}.$$

Мы уже рассматривали погашение займа равными срочными уплатами. Согласно общепринятому правилу из величины срочной уплаты выплачиваются проценты, а остаток идет на погашение долга.

В месяце с номером t сумма, идущая на погашение задолженности, составит:

$$d_t = d_{t-1} \cdot (1+i) = d_1 \cdot (1+i)^{t-1}; \; d_1 = R - Di.$$

Сумма погашенной задолженности за t месяцев

$$W_t = d_1 + d_2 + ... + d_t = d_1 \sum_{k=1}^{t} (1+i)^{k-1} = d_1 \cdot FVIFA_{i,t}.$$

Остаток долга на начало $(t + 1)$-го месяца находится следующим образом:

$$D_t = D - W_t = D - d_1 \cdot FVIFA_{i,t} = D - (R - Di) \cdot FVIFA_{i,t}.$$

Пример 13.1. Под залог недвижимости выдана на десять лет ссуда в размере 100 тыс. руб. Погашение ежемесячное, постнумерандо, на долг начисляются проценты по номинальной ставке 12%.

Р е ш е н и е. Таким образом: $N = 120$; $i = 0{,}01$. Для этих условий ежемесячные расходы должника:

$$R = \frac{D}{PVIFA_{i,N}} = \frac{100000}{69{,}70052} \approx 1434{,}71 \text{ руб.}$$

Проценты за первый месяц равны 100 000 × 0,01 = 1000 руб. На погашение долга остается d_1 = 434,71 – 1000 = 434,71 руб.

План погашения долга, тыс. руб.:

Месяц	Остаток долга на начало месяца D_t	Взнос R	Проценты	Погашение долга d_t
1	100 000,00	1434,71	1000,00	434,71
2	99 565,29	1434,71	995,65	439,06 = 434,71·1,01
3	99 126,23	1434,71	991,26	443,45 = 439,06·1,01
…				
39	80 017,63	1434,71	800,24	634,47
…				
120	1420,50	1434,71	14,21	1420,50
Итого		172 165,2	72 165,2	100 000,00

По условиям ипотечного займа найдем остаток долга на начало 118-го месяца:

$$D_{118} = D - (R - Di) \cdot FVIFA_{i,t} =$$

$$= 100\,000 - (1434 - 100\,000 \cdot 0{,}01) \cdot 220{,}3329 = 4219{,}35 \text{ руб.}$$

13.2. Стандартная ипотека с неполным погашением задолженности и выплатой в конце срока остатка долга

Условия такой ипотеки позволяют уменьшить размеры периодических взносов и (или) сократить срок ссуды. Срочные уплаты рассчитываются таким образом, что они не покрывают всей задолженности, остаток (обозначим его как В) выплачивается в конце срока (рис. 13.2).

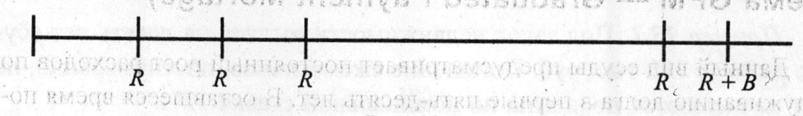


Рис. 13.2

Величину B называют шаровым платежом. Уравнение, балансирующее условия ипотеки, имеет вид:

$$D = R \cdot PVIFA_{i,N} + B \cdot PVIF_{i,N},$$

где $PVIF_{i,N} = \dfrac{1}{(1+i)^N}$.

Если оговорен размер срочной уплаты, то размер шарового платежа:

$$B = (D - R \cdot PVIFA_{i,N}) / PVIF_{i,N} = (D - R \cdot PVIFA_{i,N}) \cdot (1+i)^N .$$

Пример 13.2. Ипотека задана следующими условиями: $D = 100\ 000$; $n = 10$; $R = 1000$; $i = 1\%$; $N = 120$. Найдем размер шарового платежа.

Р е ш е н и е. Размер шарового платежа B найдем по последней формуле:

$$B = (100\ 000 - 1000 \cdot PVIFA_{1\%,120}).(1+0{,}01)^{120} = 10\ 000{,}00 \text{ руб.}$$

Если оговорен размер шарового платежа B, то размер срочной уплаты:

$$R = \frac{D - B \cdot PVIF_{i,N}}{PVIFA_{i,N}} = \frac{D - B \cdot \upsilon^N}{PVIFA_{i,N}},$$

где $\upsilon = \left(1/(1+i)\right)$.

Пример 13.3. Ипотека задана следующими условиями: $D = 100\ 000$ руб.; $n = 10$; $B = 50\ 000$; $i = 1\%$; $N = 120$. Найдем размер срочной уплаты.

Р е ш е н и е. Размер срочной уплаты найдем по последней формуле:

$$R = \frac{1000000 - 50000 \cdot 1{,}01^{-120}}{PVIFA_{1\%,120}} = 1217{,}35 \text{ руб.}$$

13.3. Нестандартные ипотеки. Ипотека с ростом платежей (схема GPM — Graduated Payment Mortage)

Данный вид ссуды предусматривает постоянный рост расходов по обслуживанию долга в первые пять-десять лет. В оставшееся время погашение производится постоянными взносами. Такая схема погашения может привести к тому, что в первые годы расходы должника по обслуживанию долга (срочные уплаты) окажутся меньше суммы процентов. В связи с этим величина долга некоторое время увеличивается.

Разделим весь срок погашения ссуды на два интервала протяженностью m и M месяцев. В первом месяце расходы растут с постоянным темпом роста q:

$$R_t = R_1 \cdot q^{t-1},$$

где R_1 — расходы в первом месяце; q — ежемесячный темп роста расходов.

Во втором периоде расходы должника равны постоянной величине:

$$R = R_1 \cdot q^{m-1} = R_m.$$

Найдем современную стоимость платежей каждого периода относительно начала действия контракта.

В первом периоде последовательность платежей представляет геометрическую прогрессию, и современная стоимость этого потока:

$$A_1 = R_1 \nu + R_1 q \nu^2 + ... + R_1 q^{m-1} \nu^m = R_1 \nu \cdot \frac{(q\nu)^m - 1}{q\nu - 1}; \ \nu = \frac{1}{1+i}.$$

Во втором периоде платежи представляют собой отложенную постоянную ренту с членом $R = R_1 \cdot q^{m-1}$. На начало действия контракта современная стоимость этой ренты:

$$A_2 = R \cdot PVIFA_{i,M} \cdot \nu^m = R_1 \cdot q^{m-1} \cdot PVIFA_{i,M} \cdot \nu^m.$$

Приравняем современную стоимость всего потока платежей к сумме задолженности:

$$D = A_1 + A_2 = R_1 \nu \cdot \frac{(q\nu)^m - 1}{q\nu - 1} + R_1 \cdot q^{m-1} \cdot PVIFA_{i,M} \cdot \nu^m.$$

Отсюда:

$$R_1 = \frac{D}{\nu \cdot \frac{(q\nu)^m - 1}{q\nu - 1} + q^{m-1} \cdot PVIFA_{i,M} \cdot \nu^m} = \frac{D(1+i)}{\frac{(q\nu)^m - 1}{q\nu - 1} + (q\nu)^{m-1} \cdot PVIFA_{i,M}}.$$

Пример 13.4. Сумма задолженности по договору ипотеки — 100 000 руб., общий срок погашения — 20 лет (240 месяцев); предусматривается рост платежей в течение 60 месяцев; процентная ставка за ссуду — 10% годовых; ежегодный прирост платежей — 5%. Необходимо разработать график погашения долга.

Р е ш е н и е. Исходные данные: D = 100 000; m = 60; M =180; i = = 0,1/12 = 0,0083333; $\nu = 1/(1 + i)$ = 0,9917355.

Ежемесячный темп роста расходов в первом периоде составит $q = \sqrt[12]{1{,}05}$ = 1,0040741; $q\nu$ = 0,9957760; $PVIFA_{0,83333\%,180}$ = 93,0576507 .

Находим величину взноса первого месяца:

$$R_1 = \frac{100000 \cdot 1{,}0083333}{\dfrac{0{,}9957760^{60} - 1}{0{,}9957760 - 1} + 0{,}9957760^{59} \cdot 93{,}0576507} = 802{,}87 \text{ руб.}$$

Таким образом, ежемесячные расходы в первом периоде определяются как $802{,}870 \times 1{,}004074^{t-1}$. Расходы в конце пятилетнего периода:

$$R_{60} = 802{,}87 \cdot 1{,}004074^{60-1} = 1020{,}52 \text{ руб.}$$

Эта же сумма ежемесячно выплачивается и во втором периоде.

13.4. Ссуды с периодическим увеличением взносов (SRM — Step Rate Mortgage)

Схема такой ипотеки является вариантом GPM: по согласованному графику каждые три-пять лет увеличивается сумма взносов. Весь срок ипотеки разбит на k периодов (равные или неравные). Размеры взносов в каждом периоде — $R_1, R_2, .., R_{k-1}$. Задача состоит в том, чтобы определить размер последнего взноса R_k.

Рассмотрим простейший вариант, когда периоды одинаковы по длине и длина одного периода $m = N / k$. В каждом периоде с номером t имеем аннуитет. Найдем сумму Q современных стоимостей $k - 1$ аннуитетов:

$$Q = R_1 \cdot PVIFA_{i,m} + R_2 \cdot PVIFA_{i,m} \cdot \nu^m + R_3 \cdot PVIFA_{i,m} \cdot \nu^{2m} + \ldots$$

$$\ldots + R_{k-1} \cdot PVIFA_{i,m} \cdot \nu^{(k-2)m}.$$

Это можно записать также следующим образом:

$$Q = \sum_{t=1}^{k-1} R_t \cdot PVIFA_{i,m} \cdot \nu^{(t-1)m}.$$

Современная стоимость W непокрытой взносами задолженности:

$$W = D - Q.$$

Эта задолженность W должна быть покрыта взносами последнего периода:

$$W = R_k \cdot PVIFA_{i,m} \cdot \nu^{(k-1)m}.$$

Отсюда размер взносов в последнем периоде:

$$R_k = \frac{W}{PVIFA_{i,m}} \cdot (1+i)^{(k-1)m}.$$

13.5. Ссуда с залоговым счетом

Для должника в отношении метода погашения долга эта ипотека не отличается от ипотечной схемы GPM. Для кредитора это стандартная ипотека. Такое совмещение двух схем достигается открытием специального залогового счета, на который должник (или третья сторона) вносит оговоренную сумму. С этого счета в погашение долга списываются некоторые суммы. Недостающие средства доплачиваются должником. Этим достигается некоторое обеспечение выплат и сокращение расходов должника в первые m месяцев.

В зависимости от того, какая величина задается, возможны различные постановки задачи. Рассмотрим одну из них. Пусть заданным является размер залогового счета, и необходимо определить суммы взносов с учетом частичного погашения путем списания с этого счета. Решение выполняется в три этапа. На первом этапе по формуле:

$$R = \frac{D}{PVIFA_{i,N}}$$

рассчитывается необходимый размер взносов R, далее определяются суммы списания с залогового счета в первые m месяцев, на последнем этапе находятся суммы доплат до требуемого размера взносов R.

Для определения сумм списания введем обозначения:

V_t — сумма, списываемая с залогового счета;

r — месячная ставка процента, начисляемого на средства залогового счета;

Z — сумма залогового счета.

Обычно суммы списания со счета сокращаются во времени с постоянным темпом, таким образом, соответственно размеры доплат увеличиваются.

Находим сумму, списываемую с залогового счета в месяце с номером t:

$$V_t = V_{t-1}q = V_1 q^{t-1}.$$

Современная стоимость этого потока платежей равна Z, т.е.

$$V_1 \cdot \nu + V_1 \cdot q \cdot \nu^2 + V_1 \cdot q^2 \cdot \nu^3 + ... + V_1 \cdot q^{m-1} \cdot \nu^m = Z,$$

где $\nu = 1/(1 + r)$.

Используя формулу суммы m членов геометрической прогрессии, получим:

$$Z = V_1 \cdot \frac{(q\nu)^m - 1}{q - (1+r)}.$$

Отсюда сумма списания с залогового счета в первый месяц:

$$V_1 = Z \cdot \frac{q - (1+r)}{(q\nu)^m - 1}.$$

Сумма, списываемая с залогового счета в месяце с номером t:

$$V_t = V_{t-1} \cdot q = V_1 \cdot q^{t-1}.$$

Должник доплачивает величину $Y_t = R - V_t$. Здесь t меняется от 1 до m. При $m < t \leq M$ должник уже выплачивает ежемесячно взнос R.

Остаток долга на начало (t+1)-го месяца находится как в стандартной ипотеке:

$$D_t = D - W_t = D - d_1 \cdot FVIFA_{i,t} = D - (R - Di) \cdot FVIFA_{i,t}.$$

Пример 13.5. Стоимость закладываемого имущества — 120 тыс. руб. Продавец получает за счет ссуды 115 тыс. руб. и от покупателя 5 тыс. руб. Срок ипотеки — 10 лет. Покупатель открывает специальный счет (15 тыс. руб.). На счет начисляются проценты по ставке 10% годовых (начисление ежемесячное), списание производится 20 месяцев, сумма списания уменьшается на 2% в месяц. Составить план погашения кредита.

Решение. Исходные данные: $Z = 15$ тыс. руб.; $m = 20$; $N = 120$; $q = 0,98$; $i = 12\%$; $r = 10\%$.

Размер ежемесячных взносов, которые получает кредитор:

$$R = \frac{115}{PVIFA_{1,120}} = \frac{115}{69,70042} = 1,64992 \text{ тыс. руб.}$$

Первая сумма списания со счета:

$$V_1 = \frac{Z(qv - 1)}{v((qv)^m - 1)} = \frac{15(0,9719008 - 1)}{\frac{1}{1,0083333}(0,9719008^{20} - 1)} = 0,97815 \text{ тыс. руб.}$$

Здесь $v = \frac{1}{1+0{,}10/12}$, $qv = \frac{0{,}98}{1+\frac{0{,}10}{12}} = \frac{0{,}98}{1{,}0083333} = 0{,}9719008.$

Сумма списания со счета через t месяцев:

$$V_t = 0{,}97815 \times 0{,}98^{t-1} \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, суммы списания составят, тыс. руб.:

Месяц	1-й	2-й		20-й	21-й		120-й
Списания со счета, V_t	0,978	0,959		0,653	0	...	0
Взносы должника, R_t	0,672	0,691		0,997	1,650	...	1,650
Размер ежемесячных взносов, которые получает кредитор, R	1,650	1,650		1,650	1,650	...	1,650

Если бы не было залогового счета, то должник ежемесячно платил бы кредитору срочную уплату $R = \frac{100}{PVIFA_{120,1}} = \frac{100}{69{,}70042} \approx 1{,}434771$ тыс. руб. Залоговый счет сокращает взносы должника в данном случае в первые 20 месяцев.

Если на счет начисляются проценты по ставке 15% годовых, то

$$q \cdot v = \frac{0{,}98}{1+\frac{0{,}15}{12}} = \frac{0{,}98}{1{,}0125} = 0{,}9679012$$

и размер первого списания со счета составит:

$$V_1 = \frac{15(0{,}9679012-1)}{\frac{1}{1{,}0125}(0{,}9679012^{20}-1)} = 1{,}017719 \approx 1{,}01772 \text{ тыс. руб.}$$

Суммы списания, тыс. руб.:

Месяц	1-й	2-й		20-й	21-й		120-й
Со счета, V_t	1,018	0,997		0,693	0	...	0
Взносы должника, R_t	0,632	0,653		0,957	1,650	...	1,650

Ссуда с льготным периодом. В такой ипотеке предполагается наличие льготного периода, в течение которого выплачиваются только

проценты по долгу. Такая схема в наибольшей мере сдвигает финансовую нагрузку должника. Расчет размеров взносов осуществляется так же, как и для стандартной ипотеки.

Ссуды с периодическим изменением процентной ставки. Схема этой ссуды предполагает, что стороны каждые три-пять лет пересматривают уровень процентной ставки. Тем самым создается возможность для некоторой, конечно, неполной, адаптации к изменяющимся условиям рынка.

Схема ипотеки с переменной процентной ставкой (VRM — Variable Rate Mortgage). Уровень ставки здесь «привязывается» к какому-либо распространенному показателю. Пересмотр ставки обычно осуществляется по полугодиям. Чтобы изменения ставок не были очень резкими, предусматриваются верхняя и нижняя границы разовых коррективов (например, не более 2%).

Особый вид ипотеки предназначен для заклада домов пожилыми владельцами. Он назван *ипотекой с обратным аннуитетом* (RAM — Reverse Annuity Mortgage). Цель такого залога — получение систематического дохода владельцем жилища. Операция напоминает продажу имущества в рассрочку.

Основной задачей при анализе ипотек является разработка планов погашения долга. Важно также уметь определить сумму остатка задолженности на любой момент процесса погашения.

14. ПОТРЕБИТЕЛЬСКИЙ КРЕДИТ

Потребительский кредит предоставляется населению для покупки предметов личного потребления. Потребительский кредит может быть предоставлен с отсрочкой платежа и последующим разовым погашением всей суммы. Другой метод предусматривает погашение платежа в рассрочку — частями. Здесь проценты начисляются на всю сумму кредита, а сумма задолженности (сумма, предоставленная в кредит, плюс начисленные проценты) равномерно погашается на протяжении всего срока кредита.

Разновидностью погашения потребительского кредита является метод, при котором суммы процентных платежей и суммы погашения основного долга изменяются от периода к периоду по мере изменения сроков погашения ссуды.

14.1. Погашение потребительского кредита равными выплатами

Наращенная сумма долга определяется по формуле: $S = P(1 + in)$, а сумма разового погасительного платежа q будет зависеть от числа погасительных платежей в году (m). Разовый погасительный платеж:

$$q = \frac{S}{nm},$$

где n — срок кредита в годах.

Так как проценты начисляются только на всю сумму первоначального долга в течение всего срока погашения, то, несмотря на уменьшение величины долга с каждым платежом, фактически процентная ставка оказывается значительно выше ставки, предусмотренной при заключении сделки.

Пример 14.1. Холодильник ценой 2 тыс. руб. продается в кредит на год под 10% годовых. Погасительные платежи вносятся через каждые три месяца. Определить размер разового погасительного платежа.

Р е ш е н и е. Сумма, подлежащая погашению за весь срок кредита:

$$S = 2(1 + 1 \times 0{,}1) = 2{,}2 \text{ тыс. руб.}$$

Разовый погасительный платеж:

$$q = \frac{2{,}2}{1 \cdot 4} = 0{,}55 \text{ тыс. руб.} = 550 \text{ руб.}$$

14.2. Погашение потребительского кредита изменяющимися суммами

При погашении кредита изменяющимися суммами возникает задача определения суммы, идущей на погашение основного долга и суммы процентных платежей.

Если сумма кредита выдана на год, погашение производится ежемесячными платежами, то можно воспользоваться «правилом 78». Это правило получило такое название потому, что сумма порядковых номеров месяцев года — 78 ($1 + 2 + ... + 12 = 78$). В соответствии с этим правилом уплата процентов при первом платеже составит $\frac{12}{78}$ общей

начисленной суммы процентов, а оставшаяся часть платежа пойдет на уплату основного долга. При втором платеже на оплату процентов пойдет $\frac{11}{78}$ общей начисленной суммы процентов и т.д.

Пример 14.2. Кредит в сумме 10 тыс. руб. выдан на шесть месяцев под 20% годовых (проценты простые). Погашение задолженности производится ежемесячными платежами. Составить план погашения задолженности.

Р е ш е н и е. Наращенная сумма долга в конце периода составит:

$$S = P(1 + in) = 10(1 + 0{,}5 \times 0{,}2) = 11 \text{ тыс. руб.}$$

Сумма начисленных процентов:

$$I = P\,i\,n = 10 \times 0{,}5 \times 0{,}2 = 1 \text{ тыс. руб.}$$

Ежемесячные выплаты:

$$q = \frac{S}{6} = \frac{11000}{6} = 1833{,}33 \text{ руб.}$$

Найдем сумму порядковых номеров месяцев:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21.$$

Из первого платежа в счет уплаты процентов идет $\frac{6}{21}$ общей суммы начисленных процентов:

$$\frac{6}{21} = 285{,}71 \text{ руб.}$$

Сумма, идущая на погашение основного долга, составляет:

$$1833{,}33 - 285{,}71 = 1547{,}62 \text{ руб.}$$

Из второго платежа в счет уплаты процентов идет $\frac{5}{21}$ общей суммы начисленных процентов:

$$\frac{5}{21} \times 1000 \approx 238{,}09 \text{ руб.}$$

Сумма, идущая на погашение долга:

$$1833{,}33 - 238{,}09 = 1595{,}24 \text{ руб.}$$

План погашения долга:

Доля погашаемых процентов	Сумма погашения процентных платежей, руб.	Сумма погашения основного долга, руб.	Остаток основного долга на начало месяца, руб.
6/21	285,71	1547,62	10000,00
5/21	238,09	1595,24	8452,38
4/21	190,48	1642,86	6857,14
3/21	142,86	1690,48	5214,28
2/21	95,24	1738,09	3523,8
1/21	47,62	1785,71	1785,71
Итого:	1000,00	10000,00	

14.3. Сравнение коммерческих контрактов

В коммерческой практике часто сталкиваются с ситуациями, когда один и тот же товар можно купить у разных поставщиков. Условия кредита должны приниматься во внимание при выборе контракта, так преимущество варианта с низкой ценой может быть «перекрыто» невыгодными для покупателя условиями кредитования. Существует два способа сравнения коммерческих контрактов. **Классический подход, или задача Клаузберга.** Данный подход, предложенный еще в прошлом веке и широко применяемый в настоящее время, заключается в сравнении величин всех платежей, предусматриваемых контрактами. Вариант с наименьшей современной стоимостью считается предпочтительным для должника.

При расчете современных стоимостей для сравнения контрактов основным моментом является выбор уровня ставки процентов, по которой производится дисконтирование, — ставки сравнения. При этом необходимо учитывать, что чем выше ставка, тем в большей мере учитывается такой фактор, как время: более отдаленные платежи оказывают все меньшее влияние на современную стоимость затрат.

При выборе ставки сравнения ориентируются на существующий уровень ссудного процента.

Можно показать, что если современная стоимость платежей по одному из сравниваемых контрактов больше, чем по другому, то такое соотношение сохраняется и для других уровней ставки сравнения, если они превышают наибольшую из ставок в сравниваемых контрактах или если ставки сравнения меньше наименьшей из этих ставок.

Метод расчета предельных значений параметров соглашений. Допустим, существует два варианта покупки товара в кредит. Первый поставщик продает по цене P_1, ставка за кредит — i_1. У второго поставщика цена товара — P_2, а ставка i_2 не объявлена. Возникает возможность определить максимально допустимое значение i_2.

Рассмотрим первый способ сравнения коммерческих контрактов.

Продавец предлагает несколько вариантов уплаты за один и тот же товар. Мы должны выбрать наилучший вариант для себя. Каждый из вариантов предусматривает следующие условия:

1) авансовые платежи (задаются суммы и сроки выплат);

2) льготный период, в котором выплачиваются только проценты за кредит, а кредит не выплачивается. Здесь оговариваются сроки и методы выплаты процентов: проценты могут выплачиваться один раз в конце льготного периода, могут выплачиваться ежегодно, образуя аннуитет;

3) сроки и методы погашения задолженности по кредиту. Будем рассматривать случай, когда кредит погашается равными ежегодными выплатами.

Пусть Q_1 — первый авансовый платеж, который вносится при заключении контракта; Q_2 — второй авансовый платеж, который вносится через t лет после заключения контракта; i — процент за кредит; L — срок льготного периода; D — остаток задолженности после выплаты авансовых платежей; R — величина ежегодных срочных уплат; n — срок погашения остатка задолженности D; q — ставка сравнения.

Тогда современная стоимость всех платежей:

$$A - Q_1 + Q_2 \mathrm{v}^t + D((1+i)^1 - l)\mathrm{v}^t + L + R \cdot PVIFA^{q;n}\, \mathrm{v}^t + L,$$

$$\text{здесь } R = v = \frac{1}{1+q}.$$

Если же в льготном периоде проценты выплачиваются периодически и льготный период состоит из целого числа лет, то формула примет вид:

$$A = Q_1 + Q_2 v^t + Di \cdot PVIFA_{q;n} v^t + R \cdot PVIFA_{q;n} v^{t+L}.$$

Пример 14.3. Предлагается один и тот же товар по цене 80 тыс. руб., но с различными вариантами погашения кредита:

	I вариант	II вариант
Цена Р, тыс. руб.	80 тыс. руб.	80 тыс. руб.
1-й аванс при заключении контракта	4 тыс. руб.	4 тыс. руб.
2-й аванс через 6 месяцев	4 тыс. руб.	8 тыс. руб.
Льготный период	—	6 месяцев
Ставка за кредит	10%	10%
Срок аннуитета	5 лет	8 лет
Ставка сравнения	15%	15%

Во втором варианте выплаты процентов — в конце льготного периода.

Находим современную стоимость всех платежей:

по I варианту:

$$A_1 = 4 + 4 \cdot \frac{1}{(1+0{,}15)^{1/2}} + \frac{(80-8)}{PVIFA_{10\%,5}} PVIFA_{15,5} \cdot \frac{1}{(1+0{,}15)^{1/2}} =$$

$$= 4 + 3{,}73002 + 59{,}37154 = 67{,}10156 \text{ тыс. руб.};$$

по II варианту:

$$A_2 = 4 + 8 \cdot \frac{1}{(1+0{,}15)^{1/2}} + (80-12) \cdot (1+0{,}1)^{1/2} - 1) \cdot \frac{1}{1{,}15} +$$

$$+ \frac{(80-12)}{PVIFA_{10\%}} PVIFA_{15,8} \cdot \frac{1}{1{,}15} =$$

$$= 4 + 7{,}46004 + 2{,}88609 + 49{,}73588 \approx 64{,}08201 = 64{,}08201 \text{ тыс. руб.}$$

II вариант уплаты предпочтительнее.

Смысл суммы A в том, что, будучи инвестированной под ставку q, она обеспечит выплату всех платежей, предусмотренных контрактом.

Пример 14.4. Предлагается один и тот же товар с двумя вариантами уплаты:

	I вариант	II вариант
Цена P, тыс. руб.	10,5	11
Аванс Q, тыс. руб.	2	1
Срок поставки t, лет	1	1
Срок кредита, лет	8	10
Льготный период L, лет	2	3
Ставка за кредит i, %	10,5	10
Ставка сравнения q, %	15	15

Проценты за кредит выплачиваются в конце каждого года.

Найдем современную стоимость всех платежей по I варианту. Рентные платежи выплачиваются в течение 6 лет. Тогда:

$$A_1 = 2 + (10{,}5 - 2)0{,}105 \cdot PVIFA_{15;2} + \frac{1}{(1+0{,}15)^1} +$$

$$+ \frac{10{,}5-2}{PVIFA_{10;5;6}} PVIFA_{15\%;6} \frac{1}{(1+0{,}15)^3} =$$

$$= 2 + 8{,}5 \cdot 0{,}105 \cdot 1{,}6257089 \cdot \frac{1}{1{,}15} + \frac{8{,}5}{4{,}2921794} \cdot 3{,}7844827 \cdot \frac{1}{1{,}15^3} =$$

$$= 2 + 1{,}2617 + 4{,}9278 = 8{,}1895 \text{ тыс. руб.}$$

Найдем современную величину всех платежей по II варианту. Срок аннуитета n — 7 лет. Тогда:

$$A_2 = 1 + (11-1) \cdot 0{,}1 \cdot PVIFA_{15\%,3} \frac{1}{(1+0{,}15)^1} + \frac{11-1}{PVIFA_{10;7}} PVIFA_{15\%,7} \frac{1}{1{,}15^4} =$$

$$= 2 + 8{,}5 \cdot 0{,}105 \cdot 1{,}6257089 \cdot \frac{1}{1{,}15} + \frac{8{,}5}{4{,}2921794} \cdot 3{,}7844827 \cdot \frac{1}{1{,}15^3} =$$

$$= 2 + 1{,}2617 + 4{,}9278 = 8{,}1895 \text{ тыс. руб.}$$

Преимущество II варианта при принятой для сравнения процентной ставке 15% очевидно.

14.4. Предельные значения параметров коммерческих контрактов

Пусть имеются два контракта на приобретение одного и того же товара. Если один из поставщиков предлагает цену, которая меньше, чем у другого ($P_1 < P_2$), и процентная ставка $i_1 < i_2$, то выбор очевиден.

Рассмотрим другой случай. Первый контракт (базовый) имеет стоимость товара P_1, ставку за кредит i_1, срок кредита n_1. Второй контракт — стоимость товара P_2, срок кредита n_2, ставка за кредит i_2 не объявлена.

Обозначим буквой q ставку сравнения контрактов. Наша задача — найти предельное значение ставки i_2 (обозначим ее предельное зна-

чение i_2^*), чтобы при любом значении ставки $i_2 < i_2^*$ второй контракт был бы предпочтительнее.

Составим уравнение эквивалентности. Для этого сначала найдем будущую стоимость обоих контрактов, а потом продисконтируем эти величины на момент заключения сделки:

$$\frac{P_1(1+i_1)^{n_1}}{(1+q)^{n_1}} = \frac{P_2(1+i_2^*)^{n_2}}{(1+q)^{n_2}}.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{P_1}{P_2}\cdot\frac{(1+i_1)^{n_1}}{(1+q)^{n_1-n_2}} \Rightarrow i_2^* = \sqrt[n_2]{\frac{P_1}{P_2}(1+i_1)^{n_1}\cdot(1+q)^{n_2-n_1}} - 1 =$$

$$= (1+q)\cdot\sqrt[n_2]{\frac{P_1}{P_2}\left(\frac{1+i_1}{1+q}\right)^{n_1}} - 1.$$

При $i_2 > i_2^*$ условия второго варианта хуже для покупателя, чем условия первого варианта. Если $i_2 = i_2^*$, то варианты равноценны. При $i_2 < i_2^*$ условия второго варианта лучше условий первого.

Совершенно аналогично мы найдем предельное значение цены $P_2{}^*$, если оговорена ставка i_2 и срок кредита n_2:

$$P_2{}^* = P_1\left(\frac{1+i_1}{1+q}\right)^{n_1}\left(\frac{1+q}{1+i_2}\right)^{n_2} = P_1\frac{(1+i_1)^{n_1}}{(1+i_2)^{n_2}}(1+q)^{n_2-n_1}.$$

Пример 14.5. Условия двух контрактов следующие:

$P_1 = 10\,000$ руб.; $i_1 = 8\%$; $n_1 = 5$ лет;

$P_2 = 12\,000$ руб.; $i_2 = 7\ \%$; $n_2 = 4$ года.

Определить предельные параметры второго контракта, приняв ставку сравнения $q = 10\%$.

Р е ш е н и е. Найдем сначала предельное значение цены $P_2{}^*$:

$$P_2^* = 10000\frac{(1+0{,}008)^5}{(1+0{,}07)^4}\cdot 1{,}1^{-1} = 10190{,}04 \text{ руб.},$$

так как $P_2 > P_2{}^*$, то второй контракт хуже.

Найдем теперь предельное значение ставки i_2^*:

$$i_2^* = 1{,}1\cdot\sqrt[4]{\frac{10000}{12000}\cdot\left(\frac{1{,}08}{1{,}1}\right)^5} - 1 = 0{,}0272 = 2{,}72\ \%,$$

так как $i_2 = 7\ \% >$, то второй контракт хуже.

В случае если $n_1 = n_2 = n$, то для расчетов предельных значений параметров сделки можно обойтись без ставки сравнения. Из уравнения

$$P_1(1+i_1)^{n_1} = P_2(1+i_2)^{n_2}$$

находим предельное значение ставки

$$i_2^* = \sqrt[n]{\frac{P_1}{P_2}}(1+i_1)-1$$

и предельное значение цены

$$P_2^* = P_1\left(\frac{1+i_1}{1+i_2}\right)^n.$$

Пример 14.6. Условия двух контрактов следующие:

$P_i = 5000$ руб.; $i_1 = 9\%$; $n_1 = 5$;

$P_2 = 5500$ руб.; i_2 — ?; $n_2 = 5$.

Р е ш е н и е. Предельное значение ставки второго контракта:

$$i_2^* = \sqrt[5]{\frac{5000}{5500}} \cdot 1{,}09 - 1 = 0{,}0694 \ (6{,}94\ \%).$$

При $i_2 < i_2^*$ второй контракт предпочтительнее.

Рассмотрим случай, когда кредит погашается равными срочными уплатами в конце года. Предельные процентные ставки по кредиту находятся в два этапа. На первом этапе оцениваются коэффициенты приведения рент $PVIFA_{i;n}$, эквивалентные условиям базового контракта; на втором этапе на основе полученных коэффициентов приведения рассчитывают искомые предельные проценты ставки.

Имеются два контракта:

I — P_1, i_1, n_1;

II — P_2, i_2, n_2;

q — ставка сравнения.

Исходное равенство современных стоимостей платежей имеет вид:

$$\frac{P_1 \cdot PVIFA_{q;n_1}}{PVIFA_{i_1 n_1}} = \frac{P_2 \cdot PVIFA_{q;n_2}}{PVIFA_{i_2 1 n_2}},$$

отсюда следует:

$$PVIFA_{i_2^*,n_2} = \frac{P_2 \cdot PVIFA_{q,n} \cdot PVIFA_{i_1,n_1}}{P_1 \cdot PVIFA_{q,n_1}}.$$

Коэффициент приведения находят по формуле:

$$PVIFA_{i_2^*,n_2} = \frac{1-(1+i_2^*)^{-n_2}}{i_2^*},$$

отсюда можно выразить предельное значение ставки i_2^*.

Величина P_2^* определяется проще:

$$P_2^* = \frac{P_1 \cdot PVIFA_{q,n_1} \cdot PVIFA_{i_2,n_2}}{PVIFA_{i_1,n_1} \cdot PVIFA_{q,n_2}}.$$

Пример 14.7. Условие базового варианта контракта: $P_1 = 15\,000$ руб.; $i_1 = 10\%$; $n_1 = 8$ лет, погашение задолженности равными платежами в конце года. Второй контракт $P_2 = 16\,000$ руб.; $n_2 = 10$ лет. При какой минимальной ставке этот вариант будет конкурентоспособен?

Решение. Зададим ставку сравнения 15%.

Тогда:

$$PVIFA_{i_2,n_2} = \frac{P_2 \cdot PVIFA_{q,n_2}}{P_1 \cdot PVIFA_{q,n_1}} PVIFA_{q,n_1} =$$

$$= \frac{16000 \cdot 5{,}0187686 \cdot 5{,}3349262}{15000 \cdot 4{,}4873215} = 6{,}364541543.$$

Итак, имеем $PVIFA_{i_2^*,10} = 6{,}364541543$. По таблицам коэффициентов приведения годовой ренты находим, что $9{,}00 < i_2^* < 9{,}50$. Применим формулу линейной интерполяции. По тем же таблицам находим:

$$y\ (9{,}50) = 6{,}2787980;$$

$$y\ (9{,}00) = 6{,}4176577.$$

Тогда:

$$\frac{i^* - 9}{0{,}5} = \frac{y - 6{,}4176577}{-0{,}1388597}$$ — уравнение прямой.

Предельная ставка

$$i^* = 9 + 0{,}5\frac{6{,}364541543 - 6{,}4176577}{-0{,}1388597} \approx 9{,}19\,\%.$$

Несколько изменим условие примера:

$P_1 = 15$ тыс. руб.; $i_1 = 10\%$; $n_1 = 8$ лет;

$P_2 = ?$ $i_2 = 9\%$; $n_2 = 10$ лет.

Необходимо оценить предельное значение цены, т. е. найти P_2^*:

$$P_2^* = 15\frac{PVIFA_{9\%;10} \cdot PVIFA_{15;8}}{PVIFA_{10\%;8} \cdot PVIFA_{15;8}} = 15\frac{6{,}41765 \cdot 4{,}48732}{5{,}33492 \cdot 5{,}01877} = 16{,}134 \text{ тыс. руб.}$$

15. ВЫЧИСЛЕНИЯ ПО ЦЕННЫМ БУМАГАМ

К основным ценным бумагам относятся облигации и акции. Облигация — это инструмент займа. Владелец облигации — кредитор, должник — эмитент облигации.

Свойства облигации:

1. Облигация не дает права на участие в управлении имуществом эмитента, она лишь является удостоверением займа.

2. Облигация — частная ценная бумага.

3. Облигация обещает платежи по купонам, а затем погашение по номиналу.

Для того чтобы оценить облигацию, необходимо найти ее современную стоимость.

Введем обозначения:

n — срок погашения облигации;

N — ее номинал;

q — купонная ставка (это процент от номинала).

Например, на облигации указана купонная ставка в 10% годовых. Номинал облигации — 100 руб. Платежи по купонам производятся один раз в год. Это значит, что облигация принесет прибыль 10 руб.

Если ежегодно получаемые по облигациям выплаты будут помещены на банковский депозит или инвестированы каким-либо иным образом и станут приносить ежегодный процентный доход $I = Nq$, то стоимость облигации P будет равна сумме двух слагаемых — современной стоимости ее аннуитетов (серии ежегодных выплат процентных платежей) и современной стоимости ее номинала:

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{Nq}{(1+i)^t} + \frac{N}{(1+i)^n} = Nq \times PVIFA_{i;n} + \frac{N}{(1+i)^n} =$$

$$= Nq \times PVIFA_{i;n} + N \times PVIF_{i;n}.$$

Пример 15.1. По облигации номинальной стоимостью 100 руб. в течение 15 лет (срок до ее погашения) будут выплачиваться ежегодно, в конце года — процентные платежи в сумме 10 руб. (q = 10%), которые могут быть помещены в банк под 10% годовых. Оценить облигацию в момент выпуска, через год после выпуска и за год до погашения облигации.

Решение. Оценим облигацию в момент выпуска:

$$P_0 = 10 \cdot PVIF_{10\%;15} + \frac{100}{(1+0{,}1)^{15}} = 10 \cdot PVIFA_{10\%;15} + 100 \cdot PVIF_{10\%;15} =$$

$$= 10 \cdot 7{,}6060795 + 100 \cdot 0{,}239392049 = 100{,}00 \, руб.$$

Рыночная цена облигации через год после выпуска:

$$P_1 = 10 \cdot PVIFA_{10\%;14} + 100 \cdot PVIF_{10\%;14} = 10 \cdot 7{,}3666875 + 100 \cdot 0{,}2633313 = 100{,}00 \text{ руб.}$$

Через пять лет:

$$P_5 = 10 \cdot PVIFA_{10\%;10} + 100 \cdot PVIF_{10\%;10} = 10 \cdot 6{,}1445671 + 100 \cdot 0{,}3855433 = 100{,}00 \text{ руб.}$$

Через 14 лет:

$$P_{14} = 10 \cdot PVIFA_{10\%;1} + 100 \cdot PVIF_{10\%;1} = 10 \cdot 0{,}9090909 + 100 \cdot 0{,}909090909 = 100{,}00 \text{ руб.}$$

Вывод: если купонная ставка равна среднерыночной (в данном случае ставке банка), то оценка облигации не меняется в течение всей жизни. Рыночная цена облигации в этом случае равна номиналу.

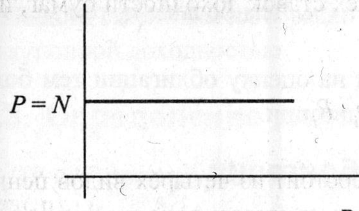
Возьмем среднерыночную ставку i = 15%. Тогда рыночная цена облигации будет ниже номинала, в этом случае говорят, что облигация продается с дисконтом. Оценим облигацию в начале жизни, за 5 и за 14 лет до погашения и найдем величину дисконта: цена облигации в начале жизни — P_0 = 70,76 руб., величина дисконта — 29,24 руб., цена облигации за 5 лет до погашения — P_5 = 74,91 руб., величина дисконта — 25,09 руб., цена облигации за 14 лет до погашения — P_{14} = 95,65 руб., величина дисконта — 4,35 руб.

Возьмем среднерыночную ставку i = 8%. Тогда рыночная цена облигации будет выше номинала, она будет продаваться с премией. Оценим облигацию в начале жизни, за 5 и 14 лет до погашения и найдем величину премии: цена облигации в начале жизни — 117,12 руб., величина премии — 17,12 руб., цена облигации за 5 лет до погашения —

P5 = 113,42 руб., величина премии —13,42 руб., цена облигации за 14 лет до погашения — P_{14} =101,85 руб., величина премии —1,85 руб.

Сделаем выводы.

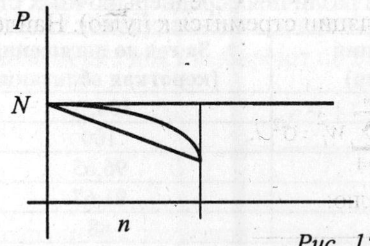
1. Если рыночная ставка равна купонной ставке ($q = i$), то в течение всей жизни облигация оценивается по номиналу (рис. 15.1). Это можно доказать, выполнив ряд математических преобразований.



В течение *n* лет рыночная цена равна номиналу

Рис. 15.1

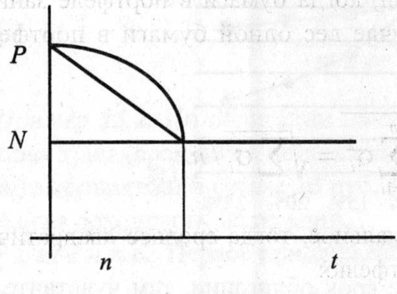
2. Если рыночная ставка больше купонной ставки ($i > q$), то облигация оценивается ниже номинала (рис. 15.2).



Облигация будет продаваться с дисконтом. С приближением даты выкупа происходит погашение дисконта

Рис. 15.2

3. Если рыночная ставка меньше купонной ($i < q$), то облигация оценивается выше номинала (рис. 15.3).



Облигация будет продаваться с премией. При приближении даты выкупа стоимость облигации понижается. Обусловлено это тем, что по ней уже выплачена большая часть доходов, и к моменту выкупа остается получить только ее номинальную стоимость

Рис. 15.3

4. К концу срока погашения оценка облигации стремится к номиналу.

15.1. Влияние купонной ставки на оценку облигации

Итак, современная стоимость облигации:

$$P = Nq \cdot PVIFA_{i;n} + N \cdot PVIF_{i;n}.$$

Купонная ставка присутствует только в первом слагаемом. Влияние первого слагаемого возрастает тогда, когда уменьшается коэффициент дисконтирования $PVIF_{i;n} = 1/(1 + i)n$. Чем больше n, тем меньше влияние второго слагаемого.

Вывод: влияние купонной ставки на оценку облигации тем больше, чем больше срок до погашения облигации.

15.2. Зависимость оценки облигации от среднерыночной ставки

Рассмотрим приведенный выше пример. Имеем облигацию с характеристиками: $N = 100$ руб.; $n = 15$ лет; $q = 10\%$. Оценим облигацию за 14 лет и за год до погашения при различных среднерыночных ставках:

	За 14 лет до погашения (длинная облигация)	**За год до погашения (короткая облигация)**
5%	149,37	104,76
10%	100	100
15%	71,38	96,65
20%	53,89	91,67
25%	42,89	88

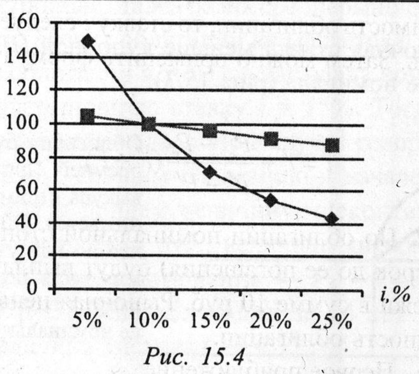


Рис. 15.4

Таким образом, чем больше срок облигации, тем чувствительнее ее оценка к изменению рыночной ставки — круче кривая (рис. 15.4). Тактика поведения инвесторов на рынке облигаций: если ожидается повышение рыночной ставки, то инвесторы стремятся заменить долгосроч-

ные облигации (длинные облигации) на облигации с меньшим сроком. При ожидании снижения ставки происходит обратное.

Степень влияния уровня ставки зависит и от размера купонной нормы дохода: чем она выше, тем меньше влияет изменение ставки. При ожидании повышения рыночной ставки для инвестора предпочтительнее покупать облигации с высокой купонной доходностью, а при понижении ставки целесообразно вкладывать деньги в облигации с низкой купонной доходностью.

15.3. Определение доходности облигации

Пусть известна рыночная цена облигации P. Составим уравнение:

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{Nq}{(1+i)^t} + \frac{N}{(1+i)^n} = Nq \cdot PVIFA_{i;n} + N \cdot PVIF_{i;n}.$$

Решив уравнение относительно i, определим доходность облигации. Для решения этого уравнения применяются приближенные методы. Первое приближение для i выбирают по следующей формуле:

$$i \approx \frac{qN + \dfrac{N - P_к}{n}}{\dfrac{P_к + N}{2}}.$$

Если оценка облигации при выбранном значении i оказалась выше, чем рыночная стоимость облигации, то ставку i следует повышать, а если ниже, то понижать. Затем можно применить формулу линейной интерполяции:

$$i = i' + \frac{P_к' - P_к}{P' - P^n}(i'' + i').$$

Пример 15.2. По облигации номинальной стоимостью в 100 руб. в течение 5 лет (срок до ее погашения) будут выплачиваться ежегодно процентные платежи в сумме 10 руб. Рыночная цена облигации — 110 руб. Найти доходность облигации.

Р е ш е н и е. Первое приближение:

$$i \approx \frac{10 + \dfrac{100 - 110}{5}}{\dfrac{110 + 100}{2}} = 0{,}07619 \approx 7{,}6\%.$$

Оценим облигацию при этой ставке:

$$P' = 10 \cdot PVIFA_{7,6\%;5} + 100 \cdot PVIF_{7,6\%;5} = 10 \cdot \frac{1-1{,}076^{-5}}{0{,}076} +$$

$$+\frac{100}{(1{,}76)^5} = 40{,}3516 + 69{,}3328 = 109{,}6844 \text{ руб.}$$

Оценка облигации оказалась ниже рыночной, ставку следует понижать. Возьмем $i = 7{,}5\%$. Оценим облигацию по этой ставке:

$$P'' = 10 \cdot PVIFA_{7,5\%;5} + 100 \cdot PVIF_{7,5\%;5} = 10 \cdot 4{,}04588 +$$

$$+ 100 \cdot 0{,}696559 = 110{,}1145 \text{ руб.}$$

Применим формулу линейной интерполяции:

$$i = 7{,}6 + \frac{109{,}6844 - 110}{109{,}6844 - 110{,}1145}(7{,}5 - 7{,}6) = 7{,}5266 \approx 7{,}53\%.$$

Таким образом, доходность облигации 7,53%.

15.4. Разновидности облигаций

1. *Отзывные облигации.* Это облигации, по условиям выпуска которых эмитент при неблагоприятных условиях может отозвать ее. Для таких облигаций при оценке вместо номинала используется отзывная цена M. В качестве отзывной цены часто берут величину N плюс проценты за год.

Тогда рыночная оценка облигации:

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{Nq}{(1+i)^t} + \frac{M}{(1+i)^n}.$$

2. *«Вечные» облигации.* Это облигации с периодической выплатой процентов без указания срока погашения. Данный вид облигаций является разновидностью вечной ренты:

$$P = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{Nq}{(1+i)^t} + \lim_{n\to\infty} \frac{N}{(1+i)^n} = \frac{Nq}{i}.$$

3. *Облигации, проценты по которым выплачиваются в момент погашения.* При погашении данного вида облигаций инвестору будет выплачена сумма в размере $N(1 + q)^n$. Современная стоимость этой суммы при дисконтировании по ставке i составит:

$$P = \frac{N(1+q)^n}{(1+i)^n} = N \cdot \left(\frac{1+q}{1+i}\right)^n.$$

4. *Облигации с нулевым купоном.* Доход от облигаций данного вида образуется в результате разницы между ценой продажи и суммой, выплачиваемой владельцу облигации в момент погашения.

Если погашение производится по номиналу, то

$$P = \frac{N}{(1+i)^n}.$$

В случае если цена погашения M отличается от номинала, то

$$P = \frac{M}{(1+i)^n}.$$

5. *Облигации с фондом погашения.* Такими облигациями обычно оформляются займы различных компаний, формируется фонд погашения, и часть эмиссий может быть выкуплена эмитентом раньше срока погашения. В этом случае не каждая облигация из эмиссии доживает до срока погашения. Поэтому для таких облигаций рассчитывают среднюю жизнь AL как среднюю взвешенную, в качестве весов берется часть эмиссий, которая выкупается в данный момент.

Пример 15.3. Имеется 10%-я пятилетняя купонная облигация номиналом 100 руб. Ее рыночная цена — 107,97 руб. Облигация имеет фонд погашения со следующим расписанием: 1/3 эмиссии выкупается после третьего года жизни, 1/3 эмиссии — после четвертого и оставшаяся 1/3 эмиссии — после пяти лет. Выкуп облигаций происходит по номиналу.

Р е ш е н и е. Средняя жизнь облигации составит:

$$AL = 1/3 \cdot 3 + 1/3 \cdot 4 + 1/3 \cdot 5 = 4 \text{ года}.$$

Рассчитаем доходности данной облигации. Заполним таблицу:

Год	**Купонная выплата, руб.**	**Общий денежный поток у инвесторов, руб.**
1-й	10	10
2-й	10	10
3-й	10	10 + 33,33 = 43,33
4-й	6,67	6,67 + 33,33 = 40,00
5-й	3,33	3,33 + 33,33 = 36,66

Рыночная цена облигации — 107,99 руб. Доходность облигации i нам неизвестна. Найдем ее, продисконтировав денежный поток у инвесторов на момент выпуска облигации:

$$107{,}99 = \frac{10}{1+i} + \frac{10}{(1+i)^2} + \frac{43{,}33}{(1+i)^3} + \frac{40{,}00}{(1+i)^4} + \frac{36{,}66}{(1+i)^5}.$$

Решением этого уравнения является ставка $i \approx 0{,}076$. Итак, доходность данной облигации — 7,6%.

6. ***Стрипирование облигаций.*** **Приобретают купонную облигацию,** затем каждый купон продают по отдельности, а после продают саму облигацию по типу ZERO-купон.

Пример 15.4. 12%-я купонная пятилетняя облигация номиналом 100 руб. куплена за 100,91 руб. Можно найти, что доходность к погашению будет 11,75%. Эта облигация была стрипирована по следующим ставкам доходности, %: 1-й год — 10; 2-й — 10,5; 3-й — 11; 4-й — 11,5; 5-й — 11,75.

Определить прибыль по данной облигации.

Заполним таблицу:

Год	Стоимость купона облигации, руб.	Ставка доходности, %	Дисконтный коэффициент $1/(1+i)^n$	Современная стоимость купона облигации, руб.
0-й	–100,91	—	—	—
1-й	12	10	0,9091	10,91
2-й	12	10,5	0,8190	9,83
3-й	12	11	0,7312	8,77
4-й	12	11,5	0,6470	7,76
5-й	12	11,75	0,5738	6,89
При погашении	100		0,5738	57,38
				101,54

Облигация приобретена за 100,91 руб., а современная стоимость ее доходов оказалась равной 101,54 руб. Владелец облигации понесет убыток в размере 0,63 руб.

15.5. Доходы от акции

Акция представляет собой ценную бумагу, дающую право ее владельцу (акционеру) участвовать в управлении акционерным обществом,

его прибыли и распределении остатков имущества при его ликвидации.

Доход по акциям выплачивается в виде дивиденда, под которым понимается часть чистой прибыли акционерного общества, подлежащей распределению среди акционеров, приходящаяся на одну акцию.

Акции делятся на привилегированные и обыкновенные. Держатели привилегированных акций пользуются преимущественным правом на получение дивиденда, минимальная величина которого должна гарантироваться при выпуске таких акций. Поскольку коммерческие интересы держателей привилегированных акций защищены, их владельцы, как правило, не имеют права голоса в акционерном обществе.

Дивиденд по обыкновенным акциям зависит от результатов деятельности акционерного общества и начисляется по решению собрания акционеров. Дивиденд по обыкновенным акциям за прошедший год может не выплачиваться (например, в случае убытков или направления полученной прибыли по решению собрания акционеров на расширение деятельности акционерного общества). Поскольку коммерческие интересы держателей обыкновенных акций в этом плане не защищены, они наделяются правом голоса в акционерном обществе.

Дивиденд по привилегированным акциям, как правило, объявляется в процентах от их номинала; его сумма на одну акцию будет равна:

$$D_{\text{пр}} = N \cdot f;$$

где N — номинал привилегированной акции;

f — ставка выплачиваемого процента;

Разница между чистой прибылью и выплаченным дивидендом по привилегированным акциям представляет собой доход на обыкновенные акции. Доход на одну акцию будет равен:

$$\text{Доход на акцию} = \frac{\text{Количество обыкновенных акций}}{\text{Чистая прибыль} - \text{Дивиденд по привил. акциям}}.$$

Оценить акцию — это значит оценить современную стоимость «бесконечного» во времени потока дивидендов этой акции.

Пусть P — рыночная цена акции, D_t — дивиденд, выплачиваемый в году t, i — ставка процентов, учитываемая при оценивании, тогда:

$$P = \frac{D_1}{1+i} + \frac{D_2}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{D_n}{(1+i)^n} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+i)^t}.$$

Если предположить, что дивиденды постоянны: ($D^t = D$, где $t = \overline{1, \infty}$), то

$$P = D \cdot \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} = \frac{D}{i}.$$

Если предположить, что через n лет акция будет продана, то цена акции будет равна сумме современных величин потока дивидендов и цены реализации P_n:

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{D_t}{(1+i)^t} + \frac{P_n}{(1+i)^n}.$$

Рассмотрим акции с постоянным темпом прироста дивидендов.

Если D_1 — дивиденд за один год; q — темп прироста дивидендов, то

$$D_t = D_1 \cdot (1 + q)^{t-1}.$$

Цена облигации:

$$P = \frac{D_1}{1+i} + \frac{D_1(1+q)}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{D_1(1+q)^{t-1}}{(1+i)^t} + \ldots =$$

$$= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_1(1+q)^t}{(1+q)(1+i)^t} = \frac{D_1}{1+q} \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1+q}{1+i} \right)^t.$$

Оценка акций носит весьма условный характер, так как величины, входящие в них — дивиденды, уровень ссудного процента, — являются труднопредсказуемыми.

Инвестор, вложивший свои средства в акции, подвергается воздействию большего финансового риска, чем владелец облигации. Под риском будем понимать неопределенность в получении будущих доходов, т. е. возможность возникновения убытков или получения доходов, размеры которых ниже прогнозируемых. Для расчета ожидаемой доходности i^* по акциям можно воспользоваться формулой:

$$i^* = \frac{P_1 - P_0 + D}{P_0},$$

где P_1 — цена продажи;

P_0 — цена покупки;

D — дивиденды, полученные за время владения акцией.

15.6. Государственные краткосрочные облигации (ГКО)

По ГКО не выплачивается купонный доход. Инвестор приобретает ГКО ниже номинала, а погашает по номиналу.

Центробанк рекомендует оценивать доходность по ГКО следующим образом:

$$D = \frac{N-P}{P} \cdot \frac{365}{m} \cdot \frac{1}{1-t},$$

где D — доходность;

N — номинал облигации;

P — цена приобретения облигации;

m — количество дней до погашения;

$\frac{1}{1-t}$ — множитель, учитывающий налог на прибыль.

Для трехмесячных ГКО количество дней до погашения берется равным 91.

Пример 15.5. Облигацию купили за 80% от номинала, погасили по номиналу через три месяца. Ставка налога на прибыль равна 35%. Рассчитать доходность к погашению.

Р е ш е н и е. Находим доходность по формуле, рекомендуемой Центробанком:

$$D = \frac{N-0{,}8N}{0{,}8N} \cdot \frac{365}{91} \cdot \frac{1}{1-0{,}35} » 1{,}54 \text{ (D = 154\%)}.$$

Рассчитаем доходность облигации i по формуле сложных процентов:

$$P = \frac{N}{(1+i)^n}.$$

Так как $P = 0{,}8 \cdot N$, $n = 1/4$, то

$$0{,}8\,N = \frac{N}{(1+i)^{1/4}}.$$

Решая последнее уравнение, находим, что доходность облигации

$$i \approx 1{,}44 = 144\%.$$

Центробанк рассчитывает доходность ГКО, используя простые проценты. Рассчитывая доходность по формуле сложных процентов, мы не учитываем налог на прибыль.

15.7. Дополнительные характеристики облигации

Доходность является важнейшим, но не единственным критерием для выбора облигации. Другим показателем привлекательности для инвестора того или иного вида облигации является продолжительность срока до ее погашения. При увеличении последнего растет степень финансового риска для ее владельца. Безусловно, риск приобретения облигаций с купонными доходами значительно ниже риска, связанного с облигациями, выплата процентов по которым производится в конце срока.

Одной из характеристик облигаций является средний срок облигации $\overline{T}$ — это средняя взвешенная величина, определяющая средний срок всех выплат по облигациям, при этом весами служат размеры этих выплат. Средний срок облигаций находится по формуле:

$$\overline{T} = \frac{\sum t_j S_j}{\sum S_j} = \frac{Nq \cdot \sum_1^n t_j + nN}{nNq + N},$$

где $t_j = 1, 2, \ldots n$ — сроки платежей по купонам в годах, $\sum_1^n t_j = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(1+n)}{2}$; S_j — сумма платежа.

Отсюда:

$$\overline{T} = n\frac{\frac{q(1+n)}{2} + 1}{qn + 1}.$$

Для облигаций с «нулевым купоном» $T = n$.

При полугодовых купонных выплатах средний срок:

$$\overline{T} = \frac{\frac{Nq}{2} \cdot \sum_{0,5}^n t_j + nN}{nNq + N}.$$

$$\sum_{0,5}^n t_j = 0{,}5 + 1 + 1{,}5 + \ldots + n = \frac{(0{,}5 + n)2n}{2} = (0{,}5 + n)n,$$

а средний срок облигации:

$$\bar{T} = n\frac{\frac{q}{2}(0{,}5+n)+1}{qn+1}.$$

Пример 15.6. Облигация номиналом 200 руб. выпущена со сроком погашения через 4 года. Ежегодно по купонам выплачивается 10% от номинала. Определить средний срок облигации.

Р е ш е н и е. Средний срок облигации составит:

$$\bar{T} = n\frac{\frac{q(1+n)}{2}+1}{qn+1} = 4\frac{\frac{0{,}1\cdot 5}{2}+1}{0{,}1\cdot 4+1} = \frac{4\cdot 1{,}25}{1{,}4} = 3{,}5714 \text{ года.}$$

Изменим условия примера: проценты по купонам выплачивают дважды в год. Тогда средний срок облигации:

$$\bar{T} = n\cdot\frac{\frac{q}{2}(0{,}5+n)+1}{qn+1} = 4\cdot\frac{\frac{0{,}1}{2}(0{,}5+4)+1}{0{,}1\cdot 4+1} = 3{,}5 \text{ года.}$$

Очевидно, что увеличение частоты выплат процентных платежей снижает средний срок облигации.

Наряду с показателем среднего срока облигации существует близкий ему по экономическому смыслу показатель, характеризующий среднюю продолжительность платежей. Иногда его называют показателем изменчивости; обозначим его символом D. Показатель изменчивости определяется по формуле:

$$D = \frac{\left(\sum_{t=1}^{n}\frac{tS_t}{(1+i)^t}\right)}{P},$$

где S_t — денежный поток по облигациям в момент времени t.

Рассмотрим предыдущий пример: N = 200 руб.; n = 4; q = 10%; рыночная процентная ставка — 12%.

Составим таблицу:

T	S_t	$\frac{1}{(1+i)^t}$	$S_t \cdot \frac{1}{(1+i)^t}$	$t \cdot S_t \cdot \frac{1}{(1+i)^t}$	$t^2 \cdot S_t \cdot \frac{1}{(1+)^t}$
1	20	0,8929	17,858	17,858	17,858
2	20	0,7972	15,944	31,888	63,776
3	20	0,7118	14,236	42,708	128,124
4	20	0,6355	139,81	559,24	2236,96
			P = 187,848	651,694	2446,718

Отсюда находим показатель изменчивости:

$$D = \frac{651,694}{187,848} = 3,4693.$$

Для бескупонной облигации D совпадает со сроком погашения.

Пусть $N = 200$; $n = 4$; $P = 113,485$; $q = 0$; $i = 12\%$. Тогда показатель изменчивости $D = 4$. Можно сделать вывод: более рискованная бескупонная облигация.

Средний срок облигации не зависит от рыночной процентной ставки, в то же время величина D зависит от ее изменения: с ростом ссудного процента его влияние на отдаленные платежи падает, что, в свою очередь, снижает величину D. Поэтому основным назначением показателя D является определение эластичности цены по процентной ставке, т. е. измерение степени колеблемости цены облигации при незначительных изменениях процентной ставки на денежном рынке.

Для измерения риска облигаций служат другие показатели, например МД — модифицированная изменчивость:

$$\text{МД} = \frac{D}{1 + i/m},$$

где D — средняя продолжительность платежей;

i — рыночная процентная ставка;

m — число выплат процентов в году.

Изменение цены облигации ΔP в результате изменения процентной ставки Δi определяется по формуле:

$$\Delta P = -\text{МД}\,\Delta i \cdot P.$$

Рассчитаем по данным последних примеров показатель изменчивости.

Для купонной облигации:

$$\text{МД} = \frac{3,4693}{1 + 0,12} \approx 3,0976.$$

Для бескупонной облигации:

$$МД = \frac{4}{1{,}12} \approx 3{,}5714 .$$

Определим, как изменится цена двух облигаций, если рыночная ставка возрастет с 12 до 12,5%.

Для купонной облигации:

$$\Delta P = -\ 3{,}0976 \cdot 0{,}005 \cdot 187{,}848 \approx 2{,}91 \text{ руб.}$$

Ожидаемое значение цены купонной облигации:

$$\Delta P = 187{,}848 - 2{,}909 = 184{,}94 \text{ руб.}$$

Для бескупонной облигации:

$$\Delta P = -\ 4 \cdot 0{,}005 \cdot 113{,}485 = -\ 2{,}27 \text{ руб.}$$

Ожидаемое значение цены бескупонной облигации:

$$P = 113{,}485 - 2{,}270 = 111{,}22 \text{ руб.}$$

Реакция цены облигации на значительные изменения рыночной ставки измеряется с помощью показателя, получившего название «выпуклость» (C_x). Расчет производится по формуле:

$$C_x = \frac{1}{1 + i/P} \cdot \left(M^2 + D^2 + \frac{D}{P} \right),$$

где M^2 — дисперсия показателей времени платежа,

$$M^2 = \frac{1}{P} \cdot \sum t^2 \cdot S_j \cdot \frac{1}{(1+i)^t} - D^2 .$$

Сдвиг в цене облигации в результате значительного изменения рыночных ставок:

$$\Delta P = -\ P \cdot МД \cdot \Delta i + 0{,}5 \cdot P \cdot C_x \cdot (\Delta i)^2.$$

Для купонной облигации из предыдущего примера (смотри последнюю таблицу) имеем:

$$M^2 = \frac{2446{,}718}{187{,}848} - 3{,}4693^2 = 0{,}9889.$$

Рассчитаем C_x:

$$C_x = \frac{1}{1 + 0{,}12} \left(0{,}9889 + 12{,}0360 + 3{,}4693 \right) = 14{,}7270.$$

Рассмотрим, как изменится цена облигации, если рыночная процентная ставка возрастет с 12 до 15%, т. е. $\Delta i = 3\% = 0{,}03$. Находим изменение цены:

$$\Delta P = -187{,}848 \cdot 3{,}0976 \cdot 0{,}03 + 0{,}5 \cdot 187{,}848 \cdot 14{,}7270 \cdot 0{,}0009 = $$
$$= -16{,}21 \text{ руб.}$$

Таким образом, рост процентной ставки на 3% вызывает снижение цены облигации до уровня 187,848 – 16,211 = 171,64 руб.

15.8. Риск и доходность портфельных инвестиций

Существуют различные определения понятия «риск». Так, в наиболее общем виде под риском понимают вероятность возникновения убытков или недополучения доходов по сравнению с прогнозируемым вариантом. В приложении к финансовым активам используют следующую интерпретацию риска и его меры: рисковость актива характеризуется степенью вариабельности дохода, который может быть получен благодаря владению данным активом. Так, государственные ценные бумаги обладают небольшим риском, поскольку вариация дохода по ним в стабильной, не подверженной кризисом экономике практически равна нулю. Напротив, обыкновенная акция любой компании представляет собой значительно более рисковый актив, поскольку доход по таким акциям может ощутимо варьировать.

Активы, с которыми ассоциируется относительно больший размер возможных потерь, рассматриваются как более рисковые; вполне естественно, что к таким активам предъявляются и большие требования в отношении доходности.

Количественно риск может быть охарактеризован как некий показатель, измеряющий вариабельность дохода. Для этой цели можно использовать размах вариации, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

Рассмотрим акции двух компаний А и Б. Пусть в следующем году могут случиться такие события:

Событие	**Вероятность**	**Ожидаемые ставки дохода для компании А, %**	**Ожидаемые ставки дохода для компании Б, %**
Бум	0,3	80	25
Стабильное равновесие	0,5	16	15
Кризис	0,2	– 60	10

Рассчитаем среднюю ставку доходности для каждой компании по формуле:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} R_i \cdot p_i .$$

Средняя ставка доходности составит:
для компании А:

$$\bar{R}_A = 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}16 + 0{,}2 \cdot (-0{,}6) = 0{,}20(20\%);$$

для компании Б:

$$\bar{R}_з = 0{,}3 \cdot 0{,}25 + 0{,}5 \cdot 0{,}15 + 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}17(17\%) .$$

Найдем степень разбросанности доходов каждой компании около среднего значения $\bar{R}$. Для этого вычислим среднее квадратическое отклонение по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\sum_i \left(R_i - \bar{R}\right)^2 \cdot p_i} .$$

Заполним таблицу:

$R_i - \bar{R}_A$	$(R_i - \bar{R}_A)^2$	$(R_i - \bar{R}_A)^2 \cdot p_i$	$R_i - \bar{R}_з$	$(R_i - \bar{R}_з)^2$	$(R_i - \bar{R}_з)^2 \cdot p_i$
60	3600	1080	8	64	19,2
–4	16	8	–2	4	2
–80	64	1280	–7	49	9,8
		$\sigma^2_А$ = 2368			$\sigma^2_Б$ = 31

Итак, для компании А среднее квадратическое отклонение $\sigma_А$ = = 48,66, для компании Б — $\sigma_Б$ = 5,57. Акции компании А более рискованные, так как $\sigma_А > \sigma_Б$. Рассчитаем для каждой компании коэффициент вариации:

$$C_V = \sigma / \bar{R} .$$

Для компании А:

$$C_{V_A} = 48{,}66 / 20 = 2{,}433 .$$

Для компании Б:

$$C_{V_з} = 5{,}57 / 17 = 0{,}328 .$$

Составим отношение:

$$C_{V_A} / C_{V_Б} = 2{,}433 / 0{,}328 = 7{,}42.$$

Акции компании А в 7,42 раза рискованнее акций компании Б.

Пусть имеется портфель облигаций, каждая бумага имеет в портфеле свой вес w_i и свою ставку дохода R_i. Оценим ожидаемую ставку доходности как средневзвешенную всех ставок доходности бумаг, имеющихся в портфеле:

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot R_i.$$

Рассмотрим портфель, который состоит из четырех видов ценных бумаг, равных по занимаемому объему, и ставки доходности для них следующие, %: 14; 35; 20; 18. Тогда ожидаемая доходность портфеля — $\overline{R} = 21{,}75\%$.

Предположим, что бумаги не скоррелированы (слабо зависят друг от друга, т. е. коэффициент корреляции стремится к нулю). Найдем дисперсию для всего портфеля:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \cdot \sigma^2\ i.$$

Мера риска по всему портфелю:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \cdot \sigma_i^2}.$$

Рассмотрим частный случай, когда бумаги в портфеле занимают одинаковый объем. В этом случае вес одной бумаги в портфеле — $w_i = 1/n$, следовательно:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1i}^{n} \sigma_i^2} = \sqrt{\sum \sigma_i^2} / n.$$

Выберем из всех σ_i максимальное, тогда среднее квадратическое отклонение дохода по всему портфелю:

$$\sigma = \frac{\sqrt{\sum \sigma_i^2}}{n} \leq \frac{\sqrt{n\sigma_{\max}^2}}{n} \leq \frac{\sigma_{\max}}{\sqrt{n}},$$

т.е. получим формулу для оценки рискованности портфеля. Если количество бумаг достаточно велико, то рискованность портфеля стремится к нулю.

Вывод: чем больше ценных бумаг в портфеле большого числа эмитентов, тем меньшей рискованностью обладает портфель.

15.9. Актуарные расчеты

Слово «актуарий» означает специалиста по страхованию.

Актуарные расчеты — система математических и статистических исчислений, применяемых в страховании.

Основные понятия, применяемые в страховом деле:

Страховщик — специализированная организация, проводящая страхование.

Страхователь — физическое или юридическое лицо, уплачивающее страховые взносы и вступающее в конкретные страховые отношения со страховщиком.

Объекты и предметы страхования — подлежащие страхованию материальные ценности, в личном страховании — жизнь, здоровье и трудоспособность страхователя.

Страховая сумма — сумма денежных средств, на которую фактически застрахованы имущество, жизнь, здоровье.

Страховой тариф (нетто-ставка) — процентная ставка от совокупной страховой суммы. Она служит основой для формирования страхового фонда.

Тарифом называется также брутто-ставка, состоящая из нетто-ставки, предназначенной для выплат страховых сумм, и нагрузки к нетто-ставке, необходимой для покрытия накладных расходов страховщика, связанных с проведением страхования. Принцип определения нетто-ставки постоянен, а структура нагрузки меняется, и, следовательно, брутто-ставка может принимать различные значения.

Построение единовременных нетто-ставок по страхованию жизни и на случай смерти. Условия страхования жизни обычно предусматривают выплаты в связи с дожитием застрахованного лица до окончания срока действия договора страхования или в случае его смерти в течение этого срока.

Для начисления страхового фонда необходимо располагать сведениями о том, сколько лиц из числа застрахованных доживет до окон-

чания срока действия их договора страхования и сколько из них каждый год может умереть.

Продолжительность жизни определенных людей является случайной величиной и колеблется в достаточно широких пределах. Демографической статистикой определена зависимость смертности от возраста людей. Эта зависимость представлена в таблицах смертности (прил.VI). Таблицы смертности показывают, как постепенно уменьшается с увеличением возраста поколение одновременно родившихся (условно принятое за 100 000). Таблицы смертности рассчитываются на основе данных переписи населения.

Возраст человека обозначен символом x, а число лиц, доживающих до каждого возраста, — l_x. Число умирающих при переходе от возраста x к возрасту $x + 1$ обозначено символом d_x.

Наряду с абсолютным показателем в таблице используется и относительный показатель q_x — вероятность умереть в возрасте x лет, не дожив до возраста $x + 1$ лет.

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}.$$

Из 100 000 родившихся женщин до 50 лет доживают 90 792 чел. ($l_x = 90\ 792$), до 51 года не доживают 459 человек ($d_x = 459$), вероятность умереть в возрасте 50 лет у женщин:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{459}{90792} \approx 0{,}00506.$$

Используя таблицу смертности, страховщик может определить величину страхового фонда, необходимого для выплаты в обусловленные сроки страховых сумм.

Рассмотрим случай, когда страховщик заключил договор на страхование жизни с мужчиной 30-летнего возраста на 5 лет. По таблицам смертности находим:

$$l_{30} = 92\ 216,\ l_{35} = 90\ 275.$$

Согласно таблице смертности до возраста 35 лет доживет 90 275 из 92 216 человек. Следовательно, и число выплат будет 90 275. Предположим, что страховая сумма каждого договора составляла 5 тыс. руб. Тогда, чтобы обеспечить все выплаты, необходим страховой фонд в размере 90 275 · 5 = 451 375 тыс. руб. Страховщик предполагает всю сумму страховых взносов инвестировать под 9% годовых. Поэтому

в момент заключения договора эта сумма может быть значительно меньше. Используя метод дисконтирования, определим эту сумму:

$$P = \frac{451375}{(1+0{,}09)^5} = 293362{,}7795 \text{ тыс. руб.}$$

Следовательно, чтобы через 5 лет иметь средства для выплаты страховых сумм по дожитию, страховщик должен располагать в начале страхования фондом в размере 293362,7795 тыс. руб. Эту сумму и нужно собрать со страхователей. То есть каждый страхователь, заключивший в 30-летнем возрасте договор на пять лет, внесет единовременную сумму, равную

$$\frac{293362{,}7795}{92216} = 3{,}181 \text{ тыс. руб.}$$

Расчет единовременной нетто-ставки по дожитию производится следующим образом:

$$_nE_x = \frac{l_{x+n} \cdot V^n}{l_x},$$

где $_nE_x$ — единовременная нетто-ставка по страхованию на дожитие для лица в возрасте x лет при сроке страхования n лет: l_x — число лиц, заключивших договор в возрасте x лет; l_{x+n} — число лиц, доживших до окончания срока страхования.

Пусть S — страховая сумма, тогда $_nE_x\ S$ — величина единовременного взноса.

Если в выражении для определения nE_x числитель и знаменатель умножить на одно и то же число V_x, то оно примет следующий вид:

$$_nE_x = \frac{l_{x+n} \cdot V^n \cdot V^x}{l_x \cdot V^x} = \frac{l_{x+n} \cdot V^{x+n}}{l_x \cdot V^x} = \frac{D_{ч+n}}{D_x},$$

где $D_x = l_x \cdot V_x$ — коммутационное число, значение D_x приведено в коммутационных таблицах (прил. VII).

Единовременная нетто-ставка для рассмотренного примера:

$$_5\text{E}_{30} = \frac{D_{30+5}}{D_{30}} = \frac{4422{,}217198}{6950{,}424689} = 0{,}636251365.$$

Единовременный взнос:

$$0{,}636251365 \cdot 5000 = 3181{,}26 \text{ руб.}$$

В коммутационных таблицах приведены значения коммутационных чисел D_x, N_x, C_x, M_x, R_x. Они находятся по формулам:

$$D_x = l_x \cdot V_x,\ N_x = D_x + D_{x+1} + \ldots + Dw;$$

$$C_x = d_x \cdot V^{x+1},\ M_x = C_x + C_{x+1} + \ldots + C_w,\ R_x = M_x + M_{x+1} + \ldots + M_w.$$

Здесь w — заданный предельный возраст в таблице смертности.

На случай смерти единовременная нетто-ставка рассчитывается по формуле:

$${}_nA_x = \frac{(d_x V + d_{x+1} V^2 + \ldots + d_{x+n-1} V^n) \cdot V^x}{l_x \cdot V^x} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}.$$

Единовременная сумма взноса составит ${}_nA_x \cdot S$ руб.

Предположим, что мужчина 30-летнего возраста решил оформить страховку на случай своей смерти сроком на 5 лет на сумму 10 тыс. руб. Найдем единовременную нетто-ставку на случай смерти:

$${}_5A_{30} =$$

$$= \frac{352 \cdot 1{,}09^{-1} + 372 \cdot 1{,}09^{-2} + 389 \cdot 1{,}09^{-3} + 406 \cdot 1{,}09^{-4} + 422 \cdot 1{,}09^{-5}}{92216} =$$

$$= \frac{1498{,}311792}{92216} = 0{,}01624785.$$

То же значение мы получим, используя коммутационные числа:

$${}_5A_{30} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} = \frac{617{,}149434 - 504{,}219972}{6950{,}424689} = 0{,}01624785.$$

Единовременный взнос составит:

$$0{,}01624785 \cdot 10\,000 = 162{,}48 \text{ руб.}$$

При наступлении страхового случая, т. е. если страхователь умрет в этот период, недостающие средства поступают из взносов тех, кто дожил до окончания срока страхования, кроме того, добавится и доход от процентов.

Расчет годичных нетто-ставки и брутто-ставки. При расчете единовременной нетто-ставки предполагается, что сумма подлежащих уплате взносов погашается единовременно в момент заключения договора о страховании. На практике такие случаи встречаются редко. Основная масса страхователей предпочитает платить взносы в течение

всего срока страхования. В связи с этим возникает необходимость расчета годичных нетто-ставок.

Единовременная нетто-ставка отличается по своей величине от годичной ставки по ряду причин. Во-первых, при единовременной уплате страхового взноса он может быть сразу после его поступления каким-либо образом инвестирован и на эту сумму будут начисляться проценты. При годичных взносах в связи с их постепенным поступлением сумма начисленных процентов будет значительно меньше, чем при единовременном взносе, в результате чего страховщик получит меньший страховой фонд. Во-вторых, при единовременном взносе его уплачивают все лица, заключающие страховой договор, а при годичной уплате ряд страхователей прекратит взносы в результате своей смерти.

Таким образом, при расчете годичной нетто-ставки необходимо учитывать частичную потерю процентных сумм и снижение числа платежей в результате смерти некоторой части застрахованных лиц.

Для перехода от единовременной нетто-ставки к годичной используются коэффициенты рассрочки.

Для каждого страхователя сумма современных стоимостей годичных взносов в 1 руб.:

$$_na_x = \frac{l_{x+1}V + l_{x+2}V^2 + ... + l_{x+n}V^n}{l_x} =$$

$$= \frac{(l_{x+1}V + l_{x+2}V^2 + ... + l_{x+n}V^n) \cdot V^x}{l_x \cdot V^x} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}.$$

Найденное значение будет близко к n, но несколько меньше его. Можно составить пропорцию:

$$_nP_x : 1 = {}_nEg_x : {}_na_x,$$

где $_nP_x$ — годичный взнос;

$_nEg_x$ — единовременный взнос;

$_na_x$ — коэффициент рассрочки.

Откуда:

$$_nP_x = \frac{_nEq_x}{_na_x}.$$

Годичная нетто-ставка постнумерандо на дожитие:

$$_nP_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} : \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} = \frac{D_{x+n}}{N_{x+1} - N_{x+n+1}};$$

на случай смерти:

$$_nP_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} : \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_{x+1} - N_{x+n+1}}.$$

Нетто-ставка по страхованию на дожитие мужчины 30 лет равна 0,1655, на случай смерти — 0,0042. Найдите эти величины самостоятельно, используя таблицу коммутационных чисел.

На основе нетто-ставки происходит аккумуляция средств для выплаты страховых сумм, но страховщик должен иметь средства на оплату дополнительных расходов — оплату труда работников, содержание помещения и т.д., а также получить доход. Покрытие этих расходов происходит за счет страхователей. В связи с этим к нетто-ставке присоединяется нагрузка, в результате чего формируется брутто-ставка:

$$_nП_x = \frac{_nH_x}{1-f},$$

где $_nП_x$ — брутто-ставка для лица в возрасте x, застрахованного на n лет;

$_nH_x$ — нетто-ставка;

f — доля нагрузки в составе брутто-ставки.

Страхование пенсии. Страхование пенсии — это вид личного страхования, по которому страховщик обязуется платить застрахованному лицу в установленные сроки регулярный доход.

Такой вид страхования можно рассматривать как вид рентных платежей, предполагающий пожизненную или временную выплату доходов. Дополнительными условиями страхования могут быть немедленные или отсроченные регулярные выплаты, т. е. производимые сразу после уплаты страховых взносов или по истечении установленного периода.

Для вычисления современной нетто-ставки при данном виде страхования примем следующий ход рассуждений. Предположим, что страховая компания обязалась выплатить застрахованному лицу в возрасте x лет в течение всей его жизни ежегодно определенную сумму и что эта выплата будет производиться с первого же года страхования в начале каждого года. Ее размер составляет 1 руб. Далее предположим, что договор на подобный вид страхования заключили все лица в возрасте x лет. В этом случае первая выплата будет произведена всем ли-

цам немедленно после заключения договора страхования и составит l_x руб. Во втором году следует выплатить l_{x+1} руб. Современная стоимость выплаты во втором году составит $l_{x+1} \cdot V$, в третьем — $l_{x+2} \cdot V^2$, в четвертом — $l_{x+3} \cdot V^3$ и т.д. Последняя выплата будет спустя $w - x$ лет, где w — предельный возраст в таблице смертности. Современная величина последней выплаты составит $l_w \cdot V^{w-x}$ руб.

Современная стоимость финансовых обязательств страховщика, относящихся ко всем l_x лицам, выразится суммой:

$$l_x + l_{x+1} \cdot V + l_{x+2} \cdot V^2 + ... + l_w \cdot V^{w-x}.$$

Для получения современной стоимости финансовых обязательств по отношению к одному лицу, т. е. нетто-ставки по страхованию пожизненной ренты — пренумерандо, эту сумму необходимо поделить на число лиц, заключивших договор страхования:

$${}_w a_x = \frac{(l_x + l_{x+1} \cdot V + l_{x+2} \cdot V^2 + ... + l_w \cdot V^{w-x}) \cdot V^x}{l_x \cdot V^x} =$$

$$= \frac{D_x + D_{x+1} + ... + D_w}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}.$$

Для ренты постнумерандо:

$${}_w a_x = \frac{(l_x \cdot V + l_{x+1} \cdot V^2 + l_{x+2} \cdot V^3 + ... + l_w \cdot V^{w-x+1}) \cdot V^x}{l_x \cdot V^x} = \frac{N_{x+1}}{D_x}.$$

Если рента пренумерандо выплачивается не пожизненно, а только до определенного возраста, то формула приобретает вид:

$${}_w a_x = \frac{(l_x + l_{x+1} \cdot V + l_{x+2} \cdot V^2 + ... + l_{x+n-1} \cdot V^{n-1}) \cdot V^x}{l_x \cdot V^x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x},$$

где n — возраст, до которого выплачивается рента.

При заключении страхового договора на условиях ренты постнумерандо (рентные платежи выплачиваются в конце года) нетто-ставка рассчитывается по формуле:

$${}_w a_x = \frac{l_{x+1} \cdot V + l_{x+2} \cdot V^2 + ... + l_{x+n} \cdot V^n}{l_x} =$$

$$= \frac{(l_{x+1} \cdot V^{x+1} + l_{x+2} \cdot V^{x+1} + ... + l_{x+n} \cdot V^{n+x}) \cdot V^x}{l_x \cdot V^x} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}.$$

Пример 15.7. Мужчина в возрасте 60 лет заключает страховой договор на получение ежегодно дополнительной пенсии: а) до достижения 70 лет на сумму 500 руб; б) выплаты пожизненные (500 руб.).

Рассчитайте единовременную нетто-ставку и страховую сумму для ренты пренумерандо. Страховая компания использует годовую ставку — 9%.

Р е ш е н и е. Для первого случая единовременная нетто-ставка составляет:

$$ {}_{70}a_{60} = \frac{N_{60} - N_{70}}{D_{60}} = \frac{2930{,}070420 - 650{,}279271}{369{,}991036} = 6{,}16174698. $$

Страховая сумма:

$$ 500\ ({}_{70}a_{60}) = 3080{,}87 \text{ руб.} $$

Для второго случая единовременная нетто-ставка составит:

$$ {}_{w}a_{60} = \frac{N_{60}}{D_{60}} = 7{,}919301104. $$

Страховая сумма:

$$ 500\ ({}_{w}a_{60}) = 3959{,}65 \text{ руб.} $$

ЗАДАНИЯ К ТИПОВОМУ РАСЧЕТУ

Во всех заданиях *n* — это номер варианта. Студенты заочного факультета определяют номер своего варианта по последним двум цифрам зачетной книжки.

1. 15 мая открыт сберегательный счет в сумме (400 + 10 *n*) руб. под процентную ставку 8% годовых, 12 июля на счет было дополнительно внесено 200 руб.; 12 сентября со счета была снята сумма 100 руб., а 18 ноября счет был закрыт. Определить общую сумму, полученную вкладчиком при закрытии счета. Использовать английскую практику начисления процентов. Год — невисокосный.

2. Долговое обязательство в сумме (2000 + 100 *n*) руб. должно быть погашено через 90 дней с процентами (10% годовых). Владелец обязательства учел его в банке за 15 дней до наступления срока по учетной ставке 12%. Найти сумму, полученную после учета векселя.

3. Клиент внес в банк (2000 + 100 *n*) руб. под 9% годовых. Через два года и 270 дней он изъял вклад. Определить полученную им сумму при использовании банком сложных процентов и смешанного метода.

4. Определить эффективную ставку сложных процентов, чтобы получить такую же наращенную сумму, как и при использовании номинальной ставки *j* %, при ежеквартальном начислении процентов ($m = 4$; $j = (5 + n)\%$).

5. Два платежа (1400 + 100 *n*) руб. и (1600 + 100 *n*) руб. со сроками соответственно два года и три года объединяются в один (3000 + + 2 *n*) руб. с использованием сложной процентной ставки 6%. Определить срок уплаты консолидированного платежа.

6. Кредит в (2000 + 100 *n*) руб. выдан на два года. Реальная доходность должна составлять 6% годовых (сложные проценты). Расчетный уровень инфляции — 16% в год. Определить ставку процентов при выдаче кредита, а также наращенную сумму.

7. Объединяются три ренты со сроками 7, 4, 9 лет; члены ренты равны между собой — $R = 2000 + 100\,n$ руб.; процентные ставки так-

же равны — i = 0,08. Член консолидированной ренты установлен в размере $3R$ руб.; процентная ставка сохраняется. Определить срок новой ренты.

8. На модернизацию предприятия получен долгосрочный кредит сроком на 10 лет, погашение которого будет производиться на следующих условиях: в первые пять лет платежи в размере (2000 + 100 n) руб. вносятся каждые полгода под 8% годовых. Следующие три года платежи в размере (4000 + 100 n) руб. вносятся также по полугодиям под 10% годовых. Последние два года платежи в размере (6000 + 100 n) руб. вносятся ежеквартально под 10% годовых. В течение всего срока ренты проценты начисляются раз в году. Определить наращенную сумму и величину кредита.

9. Предоставлен потребительский кредит в размере (1000 + 100 n) руб. на срок шесть месяцев под 12% годовых с ежемесячным погашением. Составить план погашения кредита. Воспользоваться «правилом 78». Сравните с графиком равномерных выплат процентов.

10. Получен кредит в сумме 10 000 n руб. сроком на семь лет. Процентная ставка изменяется по годам в следующем порядке:

Годы	**1—2**	**3—4**	**5—7**
Ставка, %	6	10	12

Составьте план погашения кредита.

11. Ипотечный кредит выдан на 20 лет, размер кредита — (200 000 + 1000 n) руб., ставка — 6% годовых. Погашение будет происходить ежемесячно равными срочными уплатами по 1000 руб. Рассчитайте размер «шарового платежа».

12. Сумма ипотечного долга — 100 000 n руб. Срок погашения 20 лет (240 месяцев) разбит на два периода продолжительностью: 1-й период m = 60 месяцев; 2-й период n = 180 месяцев. Процентная ставка — 6% годовых (проценты сложные). Погашение кредита производится ежемесячно. По условиям контракта ежегодный прирост срочных уплат 5% в первом периоде. Во втором периоде погашение производится равными срочными уплатами. Составьте план погашения кредита, используя стандартную программу Excel.

13. Размер ипотечного кредита D = (100 000 + 1000 n) руб. Срок ипотеки — 10 лет. Заемщик открывает специальный счет на сумму D/10 руб., на который начисляются ежемесячно проценты по ставке

12% годовых. Списание средств со счета идет ежемесячно в течение двух лет, сумма списаний ежемесячно уменьшается на 2%. Ставка за кредит — 6% годовых. Разработайте график помесячного погашения задолженности, используя программу Excel.

14. Рассматриваются предложения двух фирм по строительству промышленного объекта:

	Условия фирмы А	**Условия фирмы Б**
Цена нового объекта, руб.	500 000 + 10 000 *n*	550 000 + 10 000 *n*
Срок строительства, лет	1	1
Авансовые платежи (вносятся при подписании контракта), руб.	200 000 + 10 000 *n*	100 000 + 10 000 *n*
Срок кредита, лет	8	7
Льготный период, лет	2	3
Ставка процентов, %	10	11

Кредит погашается равными годовыми выплатами. Ставка сравнения — q = 12 %. Найти современные величины всех платежей по фирме А и Б.

15. Оцените облигацию номиналом в (100 + 10 *n*) руб. купонной ставкой 16%, выпущенной сроком на восемь лет, в начале жизни, в середине, за один год до погашения при значениях среднерыночной ставки 12 и 18%. Результаты обоснуйте.

16. Купонную облигацию, срок жизни которой пять лет, с купоном в 10% и номиналом (1000 + 100 *n*) руб. приобрели по цене (900 + + 100 *n*) руб.

Найдите доходность к погашению.

17. 10%-ю купонную облигацию номиналом в N = (100 + 10 *n*) руб. приобрели за 10 руб. Облигация имеет фонд погашения со следующим расписанием: 20% эмиссии после первого года, 30% — после второго года и оставшуюся часть эмиссии — после трех лет. Определите доходность к эквивалентной жизни.

18. Оцените акцию, которая за первый год принесет (100 + 10 *n*) руб. дивидендов, а темп прироста дивидендов составит 5% в год. Минимальная приемлемая ставка — 10%.

19. Оцените доходность портфеля, состоящего из пяти видов ценных бумаг. Здесь $q = (5 + n / 2)\%$.

Номер ценной бумаги	Объем, занимаемый в портфеле, %	Ожидаемая ставка доходности, %
1	15	Q
2	25	$q + 4$
3	10	$q + 6$
4	30	$q + 2$
5	20	$q - 2$

20. Рассчитать единовременные нетто-ставки в связи: 1) с дожитием; 2) на случай смерти для мужчины в возрасте (30+n) лет сроком на пять лет. Используя коэффициент рассрочки, рассчитать годичные нетто-ставки в связи: 1) с дожитием; 2) на случай смерти.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Для случая простых ставок ссудного процента

Ставка ссудного процента:

$$i = \frac{I_Г}{P} 100\% .$$

Коэффициент наращения:

$$k_н = \frac{S}{P} .$$

Наращенная сумма (операция компаудинга):

$$S = P(1 + in)$$

$$\text{или } S = P(1 + i\frac{\partial}{K}) .$$

Современная стоимость (операция дисконтирования):

$$P = \frac{S}{1 + in} .$$

Период начисления:

$$n = \frac{S - P}{P_i} .$$

Процентная ставка:

$$i = \frac{S - P}{P_n} .$$

Для случая простых учетных ставок

Относительная величина простой учетной ставки:

$$d = \frac{D_Г}{S} .$$

Наращенная сумма:

$$S = \frac{P}{1 - nd} = \frac{P}{1 - d\frac{\partial}{K}} .$$

Современная стоимость наращенной суммы:

$$P = S(1 - dn).$$

Период начисления:

$$n = \frac{S - P}{Sd}.$$

Учетная ставка:

$$d = \frac{S - P}{Sn}.$$

Для случая сложных ставок ссудного процента

Наращенная сумма:

$$S = P(1 + i)^n;$$

при начислении процентов m раз в году:

$$S = P(1 + j/m)^{mn}(1 + lj/m);$$

при непрерывном начислении процентов:

$$S = Pe^{\delta n}.$$

Коэффициент наращения:

$$k_H = (1 + i)^n.$$

Коэффициент наращения для срока ссуды, не являющегося целым числом:

$$k_H = (1 + i)^{n_a}(1 + n_b i).$$

Современная стоимость наращенной суммы:

$$P = \frac{S}{(1 + i)^n}.$$

Процентная ставка:

$$i = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1.$$

Номинальная процентная ставка:

$$j = m\left(\sqrt[mn]{\frac{S}{P}} - 1\right).$$

Период начисления:

$$n = \frac{\ln S / P}{\ln(1+i)};$$

$$n = \frac{\ln S / P}{m \ln(1+j/m)}.$$

Для случая сложных учетных ставок

Наращенная сумма:

$$S = \frac{P}{(1-d)^n};$$

при начислении процентов m раз в году:

$$S = \frac{P}{(1-f/m)^{mn}}.$$

Коэффициент наращения:

$$k_H = \frac{1}{(1-d)^n}.$$

Коэффициент наращения для периода начисления, не являющегося целым числом:

$$k_H = \frac{1}{(1-d)^{n_u}(1-n_b d)}.$$

Первоначальная денежная сумма:

$$P = S(1-d)^n.$$

Период начисления:

$$n = \frac{\ln P / S}{\ln(1-d)}$$

или

$$n = \frac{\ln P / S}{m \ln(1-f/m)}.$$

Сложная учетная ставка:

$$d = 1 - \sqrt[n]{\frac{P}{S}}.$$

Номинальная учетная ставка:

$$f = m\left(1 - \sqrt[mn]{\frac{P}{S}}\right).$$

Для определения эквивалентных ставок

$$i = \frac{d}{1-dn};\ d = \frac{i}{1+in};$$

$$i = [(1+ic)n-1]/n;\ i = \frac{(1+j/m)^{mn}-1}{n};$$

$$j = m(\sqrt[mn]{1+in}-1);\ i_c = (1+j/m)^m - 1;$$

$$j = m(\sqrt[m]{1+i_c}-1);\ i_c = \frac{d_c}{1-d_c};$$

$$d_c = \frac{i_c}{1+i_c}.$$

Для определения индекса инфляции

Если известен годовой темп инфляции α:

$$I_И = 1 + \alpha.$$

Если известен темп инфляции за короткий интервал α_m то за m таких интервалов:

$$I_И = (1+\alpha_m)^m.$$

Формула И. Фишера:

$$i_\alpha = i + \alpha + i\alpha.$$

Для определения ставок, учитывающих инфляцию

$$i_\alpha = \frac{(1+ni)I_И - 1}{n};\ d_\alpha = \frac{I_И - 1 + nd}{I_И n};$$

$$i_{c\alpha} = (1+i_c)\sqrt[n]{I_И} - 1;\ j_\alpha = m[(1+j/m)\sqrt[mn]{I_И} - 1];$$

$$d_{c\alpha} = 1 - \frac{1-d_c}{\sqrt[n]{I_И}};\ f_\alpha = m\left(1 - \frac{f/m}{\sqrt[mn]{I_И}}\right).$$

Для определения характеристик ренты

Наращенная сумма:

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Современная стоимость:

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Коэффициент наращения:

$$k_H = \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Коэффициент приведения:

$$a = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Размер очередного платежа:

$$R = \frac{Si}{(1+i)^n - 1}.$$

Срок аннуитета:

$$n = \frac{\ln[(S/R)i+1]}{\ln(1+i)};$$

$$n = \frac{\ln[1-(A/R)i]^{-1}}{\ln(1+i)}.$$

Для определения доходности акций

Доходность покупки акций в виде сложной ставки ссудного процента:

$$i = \frac{1+i}{\sqrt[n]{\frac{P_k}{100}}} - 1.$$

Доходность покупки облигации в виде сложной ставки ссудного процента:

$$i = \sqrt[n]{\frac{P_\alpha + I_\alpha}{P_\alpha}} - 1.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ТЕСТЫ ПО ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКЕ

Тест 1

1. Под наращенной суммой ссуды понимается:
   1) первоначальная ее сумма вместе с начисленными на нее процентами;
   2) наращенная сумма, полученная умножением первоначальной суммы ссуды на множитель наращения;
   3) сумма ссуды, полученная при начислении на нее процентов;
   4) первоначальная сумма, увеличенная на величину процентных платежей.
2. Множитель наращения для простых постоянных ставок:

   1) $k_н = 1 + in$; 2) $k_н = 1 + \sum in$; 3) $k_н = 1 + i\dfrac{\partial}{K}$; 4) $k_н = \left(1 + \dfrac{j}{m}\right)^{m \cdot n}$.
3. Коэффициент наращения:

   1) $k_н = 1 + in$; 2) $k_н = 1 + \sum in$; 3) $k_н = 1 + \dfrac{\partial}{K}$; 4) $k_н = \left(1 + \dfrac{j}{m}\right)^{mn}$.
4. Процентная ставка является:
   1) величиной, характеризующей интенсивность начисления процентов;
   2) измерителем степени доходности финансовой операции;
   3) показателем эффективности коммерческой и финансовой операции;
   4) инструментом приращения капитала.
5. Период начисления для сложных ставок ссудного процента:

   1) $n = \dfrac{S - P}{Pi}$; 2) $n = \dfrac{S - P}{Sd}$; 3) $n = \dfrac{\ln S / P}{\ln(1 + i)}$;

   4) $n = \dfrac{\ln S / P}{m \ln(1 + j / m)}$; 5) $n = \dfrac{\ln P / S}{\ln(1 - d)}$; 6) $n = \dfrac{\ln \ P / S}{m \ln(1 - f / m)}$.

6. Процентные ставки считаются сложными:

1) применяются к одной и той же первоначальной денежной сумме в течение всего периода начисления;
2) применяются по прошествии каждого интервала к сумме долга и начисленных за предыдущие интервалы процентов;
3) применяются к сумме, получаемой по прошествии интервала начисления;
4) применяются к одной и той же начальной сумме на протяжении всего срока ссуды;
5) применяются к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами.

7. Процентные ставки, реально оценивающие доходность финансовой операции, называются:

1) номинальными;
2) эквивалентными;
3) эффективными;
4) декурсивными;
5) антисипативными.

8. Относительная величина сложной учетной ставки:

1) $d = \frac{D_Г}{S}$; 2) $d = \frac{S-P}{Sn}$; 3) $d = 1 - \sqrt[n]{\frac{P}{S}}$; 4) $d = \frac{D}{S}$.

9. Относительная величина простой процентной ставки:

1) $d = \frac{S-P}{Sn}$; 2) $i = \sqrt[n]{\frac{S}{S}} - 1$; 3) $i = \frac{(1+j/m)^{m \cdot n} - 1}{n}$;

4) $i = \frac{d}{1-nd}$; 5) $i = \sqrt[n]{1+ni} - 1$; 6) $i = (1+j/m)^m - 1$.

10. Коэффициент дисконтирования для случая простых процентов:

1) $k_{i,n} = \frac{1}{1+in}$; 2) $k_{i,n} = \frac{1}{(1+i)^n}$; 3) $k_{i,n} = 1 - dn$; 4) $k_{i,n} = (1-d)^n$.

Тест 2

1. Точные проценты с фактическим числом дней ссуды:

1) $K = 360$, дни ссуды определяются по календарю;
2) $K = 365$, дни ссуды определяются по календарю;
3) $K = 365$, дни ссуды определяются по таблице;
4) $K = 360$, дни ссуды определяются по таблице;

5) $K = 360$, количество дней в месяце — 30;

6) $K = 365$, количество дней в месяце — 30;

7) $i_{360} = 0{,}986301\, i_{365}$;

8) $i_{365} = 1{,}013889\, i_{360}$.

2. Множитель наращения для простых изменяющихся во времени ставок:

1) $k_н = 1 + in$; 2) $k_н = 1 + \sum in$; 3) $k_н = 1 + i\dfrac{д}{K}$; 4) $k_н = \left(1 + \dfrac{j}{m}\right)^{m \cdot n}$.

3. Современная величина первоначального капитала:

1) $S = P(1 + in)$;

2) $P = \dfrac{S}{1 + in}$;

3) $P = \dfrac{S}{(1+i)^n}$;

4) $P = \dfrac{S}{\left(1 + \dfrac{j}{m}\right)^{m \cdot n}}$.

4. Множитель (коэффициент) наращения определяется как:

1) величина, показывающая во сколько раз вырос первоначальный капитал;

2) отношение наращенной суммы к первоначальному капиталу;

3) отношение процентных денег к наращенной сумме;

4) величина, показывающая во сколько раз вырос первоначальный капитал по сравнению с начисленным доходом.

5. Период начисления для сложных учетных ставок:

1) $n = \dfrac{S - P}{Pi}$;

2) $n = \dfrac{S - P}{Sd}$;

3) $n = \dfrac{\ln S / P}{\ln(1 + i)}$;

4) $n = \dfrac{\ln S / P}{m \ln(1 + j / m)}$;

5) $n = \dfrac{\ln P / S}{\ln(1 - d)}$;

6) $n = \dfrac{\ln \; P / S}{m \ln(1 - f / m)}$.

6. Определение современной величины наращенной суммы называется:

1) дисконтированием;

2) рефинансированием;

3) компандированием.

7. Годовая ставка, по которой определяется величина ставки процентов, применяемой на каждом интервале, называется:

1) декурсивной;

2) антисипативной;

3) номинальной;

4) эффективной.

8. Наращенная сумма методом простой учетной ставки:

1) $S = \frac{P}{1-dn}$; 2) $S = \frac{P}{(1-d)^n}$; 3) $S = \frac{P}{1-\frac{\partial}{K}d}$; 4) $S = \frac{P}{(1-\frac{f}{m})^{mn}}$.

9. Относительная величина сложной процентной ставки:

1) $i = \sqrt[n]{\frac{S}{P}}$; 2) $i = \sqrt[n]{1+in} - 1$; 3) $i = (1+\frac{j}{m})^m - 1$;

4) $i = \frac{d}{1-d}$; 5) $i = \frac{d}{1-dn}$; 6) $i = \frac{(1+i)^n - 1}{n}$.

10. Ставки, обеспечивающие равноценность финансовых последствий, называются:

1) декурсивными;
2) антисипативными;
3) номинальными;
4) эквивалентными.

Тест 3

1. Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды:

1) K = 360, дни ссуды определяются по календарю;
2) K = 365, дни ссуды определяются по таблице;
3) K = 360, дни ссуды определяются по таблице;
4) K = 360, количество дней в месяце — 30;
5) K = 365, количество дней в месяце — 30.

2. Проценты за весь срок ссуды:

1) $I = S - P$; 2) $I = SP$; 3) $I = PIn$; 4) $I = Pi$.

3. Под процентным доходом понимают:

1) доход от предоставления капитала в долг в различных формах;
2) доход от инвестиций производственного либо финансового характера;
3) отношение суммы процентных денег, выплачиваемый за фиксированный отрезок времени, к величине ссуды;
4) инструмент наращения суммы долга.

4. Период начисления измеряется:

1) промежутком времени, за который начисляются проценты;
2) промежутком времени, за который начисляется доход;
3) количеством лет, за которые происходит увеличение наращенной суммы;

4) временным промежутком, измеряющим уровень прироста первоначального капитала.

5. Декурсивный способ начисления процентов:
   1) проценты начисляются в конце каждого интервала начисления;
   2) их величина определяется исходя из величины предоставляемого капитала;
   3) отношение суммы начисленного за определенный интервал дохода к сумме, имеющейся на начало данного интервала;
   4) **проценты начисляются в начале каждого интервала начисления;**
   5) сумма процентных денег определяется исходя из наращенной суммы;
   6) отношение суммы дохода, выплачиваемого за определенный интервал, к величине наращенной суммы, полученной по прошествии этого интервала.

6. Определение величины наращенной суммы называется:
   1) дисконтированием;
   2) рефинансированием;
   3) компандированием.

7. Величина, обратная коэффициенту наращения:
   1) коэффициент дисконтирования;
   2) коэффициент прироста;
   3) коэффициент наращения;
   4) первоначальный капитал;
   5) наращенная сумма.

8. Наращенная сумма методом сложной учетной ставки:

1) $S = \dfrac{P}{1-nd}$; 2) $S = \dfrac{P}{(1-d)^n}$; 3) $S = \dfrac{P}{1-\dfrac{\partial}{K}d}$; 4) $S = \dfrac{P}{(1-\dfrac{f}{m})^{mn}}$.

9. Коэффициент наращения для случая простых процентов:

1) $k_н = 1 + in$; 2) $k_н = 1 + \sum in$; 3) $k_н = 1 + i\dfrac{\partial}{K}$; 4) $k_н = \left(1 + \dfrac{j}{m}\right)^{mn}$.

10. Какие ставки используются при безубыточной замене одного вида и метода начисления другим:
   1) номинальные;
   2) эффективные;
   3) эквивалентные.

Тест 4

1. Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды:
   1) $K = 360$, дни ссуды определяются по календарю;
   2) $K = 365$, дни ссуды определяются по календарю;
   3) $K = 365$, дни ссуды определяются по таблице;
   4) $K = 360$, дни ссуды определяются по таблице;
   5) $K = 360$, количество дней в месяце — 30;
   6) $K = 365$, количество дней в месяце — 30;
   7) $i_{360} = 0{,}986301 i_{365}$;
   8) $i_{365} = 1{,}013889 i_{360}$.
2. Процентный доход за первый год ссуды:
   1) $I = Pi$; 2) $I = Pin$; 3) $I = S - P$; 4) $I = S_1 - P$.
3. Процентная ставка ссудного процента измеряется:
   1) в процентах;
   2) в виде десятичной дроби;
   3) 1/16; 1/32;
   4) в виде натуральной дроби;
   5) в виде коэффициента.
4. Период начисления для случая простых ставок ссудного процента:

   1) $n = \dfrac{S-P}{Pi}$; 2) $n = \dfrac{S-P}{Sd}$; 3) $n = \dfrac{\ln S/P}{\ln(1+i)}$;

   4) $n = \dfrac{\ln S/P}{m\ln(1+j/m)}$; 5) $n = \dfrac{\ln P/S}{\ln(1-d)}$; 6) $n = \dfrac{\ln P/S}{m\ln(1-f/m)}$.
5. Антисипативный способ начисления процентов:
   1) проценты начисляются в конце каждого интервала начисления;
   2) их величина определяется исходя из величины предоставляемого капитала;
   3) отношение суммы начисленного за определенный интервал дохода к сумме, имеющейся на начало данного интервала;
   4) проценты начисляются в начале каждого интервала начисления;
   5) сумма процентных денег определяются исходя из наращенной суммы;
   6) отношение суммы дохода, выплачиваемого за определенный интервал, к величине наращенной суммы, полученной по прошествии этого интервала.

6. Доход, полученный как разница между размером кредита и непосредственно выдаваемой суммой, называется:

1) дисконтом;
2) процентными деньгами;
3) компаудингом.

7. Величина, обратная коэффициенту дисконтирования:

1) коэффициент дисконтирования;
2) коэффициент наращения;
3) коэффициент прироста;
4) первоначальный капитал;
5) наращенная сумма.

8. Современная величина (p) методом математического дисконтирования:

1) $P = \frac{S}{1+in}$; 2) $P = \frac{S}{(1+i)^n}$; 3) $P = S(1-dn)$; 4) $P = S(1-d)^n$.

9. Коэффициент наращения для случая сложных процентов:

1) $k_н = 1+in$; 2) $k_н = (1+i)^n$; 3) $k_н = \frac{1}{1-dn}$; 4) $k_н = \frac{1}{(1-d)^n}$.

10. Для определения эквивалентных процентных ставок необходимо знать:

1) какой инструмент требуется для корректного сравнения различных процентных ставок;
2) существует ли возможность выбора условий финансовой операции;
3) реальный относительный доход в целом за год.

Тест 5

1. Формула наращения для простых процентных ставок:

1) $S = P(1+in)$; 2) $S = P(1+\sum in)$; 3) $S = P(1+i\frac{\partial}{K})$.

2. Относительная величина ставки ссудного процента:

1) $i = \frac{I_Г}{P} \cdot 100\%$; 2) $i\% = \frac{I}{P}$; 3) $i = \frac{S}{P}$; 4) $i = \frac{I_Г}{P_г} \cdot 100\%$.

3. Ростом первоначальной суммы капитала называется:

1) процесс увеличения суммы денег в связи с присоединением процентов к сумме долга;

2) увеличение суммы долга за счет присоединения начисленных процентов;
3) количество лет, за которые происходит увеличение наращенной суммы;
4) временной промежуток измеряющий уровень прироста первоначального капитала.

4. Период начисления для случая простых учетных ставок:

1) $n = \frac{S-P}{Pi}$; 2) $n = \frac{S-P}{Sd}$; 3) $n = \frac{\ln S/P}{\ln(1+i)}$;

4) $n = \frac{\ln S/P}{m\ln(1+j/m)}$; 5) $n = \frac{\ln P/S}{\ln(1-d)}$; 6) $n = \frac{\ln P/S}{m\ln(1-f/m)}$.

5. Процентные ставки считаются простыми, если:
1) применяются к одной и той же первоначальной денежной сумме в течение всего периода начисления;
2) применяются по прошествии каждого интервала к сумме долга и начисленных за предыдущие интервалы процентов;
3) применяются к сумме, получаемой по прошествии интервала начисления;
4) применяются к одной и той же начальной сумме на протяжении всего срока ссуды;
5) применяются к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами.

6. Процентные ставки разного вида, применение которых при различных начальных условиях дает одинаковые финансовые результаты, называются:
1) номинальными;
2) эквивалентными;
3) эффективными.

7. Относительная величина простой учетной ставки:

1) $d = \frac{D_Г}{S}$; 2) $d = \frac{S-P}{Sn}$; 3) $d = 1 - \sqrt[n]{\frac{P}{S}}$; 4) $P = S/D$.

8. Современная величина (P) определяется методом коммерческого учета:

1) $P = \frac{S}{1+in}$; 2) $P = \frac{S}{(1+i)^n}$; 3) $P = S(1-dn)$; 4) $P = S(1-d)^n$.

9. Коэффициент дисконтирования для случая сложных процентов:

1) $k_{i,n} = \dfrac{1}{1+in}$; 2) $k_{i,n} = \dfrac{1}{(1+i)^n}$; 3) $k_{i,n} = 1-dn$; 4) $k_{i,n} = (1-d)^n$.

10. Под процентным деньгами понимают:
   1) доход от предоставления капитала в долг в различных формах;
   2) доход от инвестиций производственного либо финансового характера;
   3) отношение суммы процентных денег, выплачиваемой за фиксированный отрезок времени, к величине ссуды;
   4) инструмент наращения суммы долга.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица 1

Порядковые номера дней в году (для определения количества дней пользования ссудой для невисокосного года)

День месяца	Янв.	Фев.	Март	Апр.	Май	Июнь	Июль	Авг.	Сент.	Окт.	Нояб.	Дек.
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29	—	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30	—	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31	—	90	—	151	—	212	243	—	304	—	365

Таблица 2

Порядковые номера дней в году (для определения количества дней пользования ссудой для високосного года)

День месяца	Янв.	Фев.	Март	Апр.	Май	Июнь	Июль	Авг.	Сент.	Окт.	Нояб.	Дек.
1	1	32	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
2	2	33	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
3	3	34	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
4	4	35	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
5	5	36	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
6	6	37	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
7	7	38	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
8	8	39	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
9	9	40	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
10	10	41	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
11	11	42	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
12	12	43	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
13	13	44	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
14	14	45	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
15	15	46	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
16	16	47	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
17	17	48	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
18	18	49	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
19	19	50	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
20	20	51	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
21	21	52	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
22	22	53	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
23	23	54	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
24	24	55	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
25	25	56	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
26	26	57	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
27	27	58	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
28	28	59	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
29	29	60	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
30	30	—	90	121	151	182	212	243	274	304	335	365
31	31	—	91	—	152	—	213	244	—	305	—	366

Приложение 2

Таблица 3

Коэффициент наращения для сложных ставок ссудного процента

$k_н = (1 + i)^n$

n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%
1	1,0100	1,0200	1,0300	1,0400	1,0500	1,0600	1,0700	1,0800
2	1,0201	1,0404	1,0609	1,0816	1,1025	1,1236	1,1449	1,1664
3	1,0303	1,0612	1,0927	1,1249	1,1576	1,1910	1,2250	1,2597
4	1,0406	1,0824	1,1255	1,1699	1,2155	1,2625	1,3108	1,3605
5	1,0510	1,1041	1,1593	1,2167	1,2763	1,3382	1,4026	1,4693
6	1,0615	1,1262	1,1941	1,2653	1,3401	1,4185	1,5007	1,5869
7	1,0721	1,1487	1,2299	1,3159	1,4071	1,5036	1,6058	1,7138
8	1,0829	1,1717	1,2668	1,3686	1,4775	1,5938	1,7182	1,8509
9	1,0937	1,1951	1,3048	1,4233	1,5513	1,6895	1,8385	1,9990
10	1,1046	1,2190	1,3439	1,4802	1,6289	1,7908	1,9672	2,1589
11	1,1157	1,2434	1,3842	1,5395	1,7103	1,8983	2,1049	2,3316
12	1,1268	1,2682	1,4258	1,6010	1,7959	2,0122	2,2522	2,5182
13	1,1381	1,2936	1,4685	1,6651	1,8856	2,1329	2,4098	2,7196
14	1,1495	1,3195	1,5126	1,7317	1,9799	2,2609	2,5785	2,9372
15	1,1610	1,3459	1,5580	1,8009	2,0789	2,3966	2,7590	3,1722
16	1,1726	1,3728	1,6047	1,8730	2,1829	2,5404	2,9522	3,4259
17	1,1843	1,4002	1,6528	1,9479	2,2920	2,6928	3,1588	3,7000
18	1,1961	1,4282	1,7024	2,0258	2,4066	2,8543	3,3799	3,9960
19	1,2081	1,4568	1,7535	2,1068	2,5270	3,0256	3,6165	4,3157
20	1,2202	1,4859	1,8061	2,1911	2,6533	3,2071	3,8697	4,6610
21	1,2324	1,5157	1,8603	2,2788	2,7860	3,3996	4,1406	5,0338
22	1,2447	1,5460	1,9161	2,3699	2,9253	3,6035	4,4304	5,4365
23	1,2572	1,5769	1,9736	2,4647	3,0715	3,8197	4,7405	5,8715
24	1,2697	1,6084	2,0328	2,5633	3,2251	4,0489	5,0724	6,3412
25	1,2824	1,6406	2,0938	2,6658	3,3864	4,2919	5,4274	6,8485
26	1,2953	1,6734	2,1566	2,7725	3,5557	4,5494	5,8074	7,3964
27	1,3082	1,7069	2,2213	2,8834	3,7335	4,8223	6,2139	7,9881
28	1,3213	1,7410	2,2879	2,9987	3,9201	5,1117	6,6488	8,6271
29	1,3345	1,7758	2,3566	3,1187	4,1161	5,4184	7,1143	9,3173
30	1,3478	1,8114	2,4273	3,2434	4,3219	5,7435	7,6123	10,063
40	1,4889	2,2080	3,2620	4,8010	7,0400	10,286	14,974	21,725
50	1,6446	2,6916	4,3839	7,1067	11,467	18,420	29,457	46,902
60	1,8167	3,2810	5,8916	10,520	18,679	32,988	57,946	101,26

Окончание табл. 3

9%	10%	12%	15%	20%	24%	28%	32%	36%
1,0900	1,1000	1,1200	1,1500	1,2000	1,2400	1,2800	1,3200	1,3600
1,1881	1,2100	1,2544	1,3225	1,4400	1,5376	1,6384	1,7424	1,8496
1,2950	1,3310	1,4049	1,5209	1,7280	1,9066	2,0972	2,3000	2,5155
1,4116	1,4641	1,5735	1,7490	2,0736	2,3642	2,6844	3,0360	3,4210
1,5386	1,6105	1,7623	2,0114	2,4883	2,9316	3,4360	4,0075	4,6526
1,6771	1,7716	1,9738	2,3131	2,9860	3,6352	4,3980	5,2899	6,3275
1,8280	1,9487	2,2107	2,6600	3,5832	4,5077	5,6295	6,9826	8,6054
1,9926	2,1436	2,4760	3,0590	4,2998	5,5895	7,2058	9,2170	11,703
2,1719	2,3579	2,7731	3,5179	5,1598	6,9310	9,2234	12,166	15,917
2,3674	2,5937	3,1058	4,0456	6,1917	8,5944	11,806	16,060	21,647
2,5804	2,8531	3,4785	4,6524	7,4301	10,657	15,112	21,199	29,439
2,8127	3,1384	3,8960	5,3503	8,9161	13,215	19,343	27,983	40,037
3,0658	3,4523	4,3635	6,1528	10,699	16,386	24,759	36,937	54,451
3,3417	3,7975	4,8871	7,0757	12,839	20,319	31,691	48,757	74,053
3,6425	4,1772	5,4736	8,1371	15,407	25,196	40,565	64,359	100,71
3,9703	4,5950	6,1304	9,3576	18,488	31,243	51,923	84,954	136,97
4,3276	5,0545	6,8660	10,761	22,186	38,741	66,461	112,14	186,28
4,7171	5,5599	7,6900	12,375	26,623	48,039	85,071	148,02	253,34
5,1417	6,1159	8,6128	14,232	31,948	59,568	108,89	195,39	344,54
5,6044	6,7275	9,6463	16,367	38,338	73,864	139,38	257,92	468,57
6,1088	7,4002	10,804	18,822	46,005	91,592	178,41	340,45	637,26
6,6586	8,1403	12,100	21,645	55,206	113,57	228,36	449,39	866,67
7,2579	8,9543	13,552	24,891	66,247	140,83	292,30	593,20	1178,7
7,9111	9,8497	15,179	28,625	79,497	174,63	374,14	783,02	1603,0
8,6231	10,835	17,000	32,919	95,396	216,54	478,90	1033,6	2180,1
9,3992	11,918	19,040	37,857	114,48	268,51	613,00	1364,3	2964,9
10,245	13,110	21,325	43,535	137,37	332,95	784,64	1800,9	4032,3
11,167	14,421	23,884	50,066	164,84	412,86	1004,3	2377,2	5483,9
12,172	15,863	26,750	57,575	197,81	511,95	1285,6	3137,9	7458,1
13,268	17,449	29,960	66,212	237,38	634,82	1645,5	4142,1	10143
31,409	45,259	93,051	267,86	1469,8	5455,9	19427	66521	—
74,358	117,39	289,00	1083,7	9100,4	46890	—	—	—
176,03	304,48	897,60	4384,0	56348	—	—	—	—
$k_{н.с} > 99999$								

Приложение 3

Таблица 4

Коэффициент дисконтирования для сложных ставок ссудного процента
$k = 1 / (1 + i)^n$

n	1%	2%	3 %	4%	5%	6%	7%	8%
1	0,9901	0,9804	0,9709"	0,9615	0,9524	0,9434	0,9346	0,9259
2	0,9803	0,9612	0,9426	0,9246	0,9070	0,8900	0,8734	0,8573
3	0,9706	0,9423	0,9151	0,8890	0,8638	0,8396	0,8163	0,7938
4	0,9610	0,9238	0,8885	0,8548	0,8227	0,7921	0,7629	0,7350
5	0,9515	0,9057	0,8626	0,8219	0,7835	0,7473	0,7130	0,6806
6	0,9420	0,8880	0,8375	0,7903	0,7462	0,7050	0,6663	0,6302
7	0,9327	0,8706	0,8131	0,7599	0,7107	0,6651	0,6227	0,5835
8	0,9235	0,8535	0,7894	0,7307	0,6768	0,6274	0,5820	0,5403
9	0,9143	0,8368	0,7664	0,7026	0,6446	0,5919	0,5439	0,5002
10	0,9053	0,8203	0,7441	0,6756	0,6139	0,5584	0,5083	0,4632
11	0,8963	0,8043	0,7224	0,6496	0,5847	0,5268	0.4751	0,4289
12	0,8874	0,7885	0,7014	0,6246	0,5568	0,4970	0,4440	0,3971
13	0,8787	0,7730	0,6810	0,6006	0,5303	0,4688	0,4150	0,3677
14	0,8700	0,7579	0,6611	0,5775	0,5051	0,4423	0,3878	0,3405
15	0,8613	0,7430	0,6419	0,5553	0,4810	0,4173	0,3624	0,3152
16	0,8528	0,7284	0,6232	0,5339	0,4581	0,3936	0,3387	0,2919
17	0,8444	0,7142	0, 6050	0,5134	0,4363	0,3714	0,3166	0,2703
18	0,8360	0,7002	0, 5874	0,4936	0,4155	0,3503	0,2959	0,2502
19	0,8277	0,6864	0, 5703	0,4746	0,3957	0,3305	0,2765	0,2317
20	0,8195	0,6730	0,5537	0,4564	0,3769	0,3118	0,2584	0,2145
21	0,8114	0,6598	0,5375	0,4388	0,3589	0,2942	0,2415	0,1987
22	0,8034	0,6568	0,5219	0,4220	0,3418	0,2775	0,2257	0,1839
23	0,7954	0,6342	0,5067	0,4057	0,3256	0,2618	0,2109	0,1703
24	0,7876	0,6217	0,4919	0,3901	0,3101	0,2470	0,1971	0,1577
25	0,7798	0,6095	0,4776	0,3751	0,2953	0,2330	0,1842	0,1460
26	0,7720	0,5976	0,4637	0,3607	0,2812	0,2198	0,1722	0,1352
27	0,7644	0,5859	0,4502	0,3468	0,2678	0,2074	0,1609	0,1252
28	0,7568	0,5744	0,4371	0,3335	0,2551	0,1956	0,1504	0,1159
29	0,7493	0,5631	0,4243	0,3207	0,2429	0,1846	0,1406	0,1073
30	0,7419	0,5521	0,4120	0,3083	0,2314	0,1741	0,1314	0,0994
35	0,7059	0,5000	0,3554	0,2534	0,1813	0,1301	0,0937	0,0676
40	0,6717	0,4529	0,3066	0,2083	0,1420	0,0972	0,0668	0,0460
45	0,6391	0,4102	0,2644	0,1712	0,1113	0,0727	0,0476	0,0313
50	0,6080	0,3715	0,2281	0,1407	0,0872	0,0543	0,0339	0,0213
55	0,5785	0,3365	0,1968	0,1157	0,0683	0,0406	0,0242	0,0145

Окончание табл. 4

9%	10%	12%	15%	20%	24%	28%	32%	36%
0,9174	0,9091	0,8929	0,8696	0,8333	0,8065	0,7813	0,7576	0,7353
0,8417	0,8264	0,7972	0,7561	0,6944	0,6504	0,6104	0,5739	0,5407
0,7722	0,7513	0,7118	0,6575	0,5787	0,5245	0,4768	0,4348	0,3975
0,7084	0,6830	0,6355	0,5718	0,4823	0,4230	0,3725	0,3294	0,2923
0,6499	0,6209	0,5674	0,4972	0,4019	0,3411	0,2910	0,2495	0,2149
0,5963	0,5645	0,5066	0,4323	0,3349	0,2751	0,2274	0,1890	0,1580
0,5470	0,5132	0,4523	0,3759	0,2791	0,2218	0,1776	0,1432	0,1162
0,5019	0,4665	0,4039	0,3269	0,2326	0,1789	0,1388	0,1085	0,0854
0,4604	0,4241	0,3606	0,2843	0,1938	0,1443	0,1084	0,0822	0.0628
0,4224	0,3855	0,3220	0,2472	0,1615	0,1164	0,0847	0,0623	0,0462
0,3875	0,3505	0,2875	0,2149	0,1346	0,0938	0,0662	0,0472	0,0340
0,3555	0,3186	0,2567	0,1869	0,1122	0,0757	0,0517	0,0357	0,0250
0,3262	0,2897	0,2292	0,1625	0,0935	0,0610	0,0404	0,0271	0,0184
0,2992	0,2633	0,2046	0,1413	0,0779	0,0492	0,0316	0,0205	0,0135
0,2745	0,2394	0,1827	0,1229	0,0649	0,0397	0,0247	0,0155	0,0099
0,2519	0,2176	0,1631	0,1069	0,0541	0,0320	0,0193	0,0118	0,0073
0,2311	0,1978	0,1456	0,0929	0,0451	0,0258	0,0150	0,0089	0,0054
0,2120	0,1799	0,1300	0,0808	0,0376	0,0208	0,0118	0,0068	0,0039
0,1945	0,1635	0,1161	0,0703	0,0313	0,0168	0,0092	0,0051	0,0029
0,1784	0,1486	0,1037	0,0611	0,0261	0,0135	0,0072	0,0039	0,0021
0,1637	0,1351	0,926	0,0531	0,0217	0,0109	0,0056	0,0029	0,0016
0,1502	0,1228	0,0826	0,0462	0,0181	0,0088	0,0044	0,0022	0,0012
0,1378	0,1117	0,0738	0,0402	0,0151	0,0071	0,0034	0,0017	0,0008
0,1264	0,1015	0,0659	0,0349	0,0126	0,0057	0,0027	0,0013	0,0006
0,1160	0,0923	0,0588	0,0304	0,0105	0,0046	0.0021	0,0010	0,0005
0,1064	0,0839	0,0525	0,0264	0,0087	0,0037	0,0016	0,0007	0,0003
0,0976	0,0763	0,0469	0,0230	0,0073	0,0030	0,0013	0,0006	0,0002
0,0895	0,0693	0,0419	0,0200	0,0061	0,0024	0,0010	0,0004	0,0002
0,0822	0,0630	0,0374	0,0174	0,0051	0,0020	0,0008	0,0003	0,0001
0,0754	0,0573	0,0334	0,0151	0,0042	0,0016	0,0006	0,0002	0,0001
6,0490	0,0356	0,0189	0,0075	0,0017	0,0005	0,0002	0,0001	—
0,0318	0,0221	0,0107	0,0037	0,0007	0,0002	0,0001	—	—
0,0207	0,0137	0,0061	0,0019	0,0003	0,0001	—	—	—
0,0134	0,0085	0,035	0,0009	0,0001	—	—	—	—
0,0087	0,0053	0,0020	0,0005	—	—	—	—	—
$k_d < 0{,}0001$								

Приложение 4

Таблица 5

Коэффициент наращения аннуитета $PVIFA_{i,n}$

n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	2,0100	2,0200	2,0300	2,0400	2,0500	2,0600	2,0700	2,0800
3	3,0301	3,0604	3,0909	3,1216	3,1525	3,1836	3,2149	3,2464
4	4,0604	4,1216	4,1836	4,2465	4,3101	4,3746	4,4399	4,5061
5	5,1010	5,2040	5,3091	5,4163	5,5256	5,6371	5,7507	5,8666
6	6,1520	6,3081	6,4684	6,6330	6,8019	6,9753	7,1533	7,3359
7	7,2135	7,4343	7,6625	7,8983	8,1420	8,3938	8,6540	8,9228
8	8,2857	8,5830	8,8923	9,2142	9,5491	9,8975	10,260	10,637
9	9,3685	9,7546	10,159	10,583	11,027	11,491	11,978	12,488
10	10,462	10,950	11,464	12,006	12,578	13,181	13,816	14,487
11	11,567	12,169	12,808	13,486	14,207	14,972	15,784	16,645
12	12,683	13,412	14,192	15,026	15,917	16,870	17,888	18,977
13	13,809	14,680	15,618	16,627	17,713	18,882	20,141	21,495
14	14,947	15,974	17,086	18,292	19,599	21,015	22,550	24,215
15	16,097	17,293	18,599	20,024	21,579	23,276	25,129	27,152
16	17,258	18,639	20,157	21,825	23,657	25,673	27,888	30,324
17	18,430	20,012	21,762	23,698	25,840	28,213	30,840	33,750
18	19,615	21,412	23,414	25,645	28,132	30,906	33,999	37,450
19	20,811	22,841	25,117	27,671	30,539	33,760	37,379	41,446
20	22,019	24,297	26,870	29,778	33,066	36,786	40,995	45,762
21	23,239	25,783	28,676	31,969	35,719	39,993	44,865	50,423
22	24,472	27,299	30,537	34,248	38,505	43,392	49,006	55,457
23	25,716	28,845	32,453	36,618	41,430	46,996	53,436	60,893
24	26,973	30,422	34,426	39,083	44,502	50,816	58,177	66,765
25	28,243	32,030	36,459	41,646	47,727	54,865	63,249	73,106
26	29,526	33,671	38,553	44,312	51,113	59,156	68,676	79,954
27	30,821	35,344	40,710	47,084	54,669	63,706	74,484	87,351
28	32,129	37,051	42,931	49,968	58,403	68,528	80,698	95,339
29	33,450	38,792	45,219	52,966	62,323	73,640	87,347	103,97
30	34,785	40,568	47,575	56,085	66,439	79,058	94,461	113,28
40	48,886	60,402	75,401	95,026	120,80	154,76	199,64	259,06
50	64,463	84,579	112,80	152,67	209,35	290,34	406,53	573,77
60	81,670	114,05	163,05	237,99	353,58	533,13	813,52	1253,21

9%	10%	12%	15%	20%	24%	28%	32%	36%
1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2,0900	2,1000	2,1200	2,1500	2,2000	2,2400	2,2800	2,3200	2,3600
3,2781	3,3100	3,3744	3,4725	3,6400	3,7776	3,9184	4,0624	4,2096
4,5731	4,6410	4,7793	4,9934	5,3680	5,6842	6,0156	6,3624	6,7251
5,9847	6,1051	6,3528	6,7424	7,4416	8,0484	8,6999	9,3983	10,146
7,5233	7,7156	8,1152	8,7537	9,9299	10,980	12,136	13,406	14,799
9,2004	9,4872	10,089	11,067	12,916	14,615	16,534	18,696	21,126
11,028	11,436	12,300	13,727	16,499	19,123	22,163	25,678	29,732
13,021	13,579	14,776	16,786	20,799	24,712	29,369	34,895	41,435
15,193	15,937	17,549	20,304	25,959	31,643	38,593	47,062	57,352
17,560	18,531	20,655	24,349	32,150	40,238	50,398	63,122	78,998
20,141	21,384	24,133	29,002	39,581	50,895	65,510	84,320	108,44
22,953	24,523	28,029	34,352	48,497	64,110	84,853	112,30	148,47
26,019	27,975	32,393	40,505	59,196	80,496	109,61	149,24	202,93
29,361	31,772	37,280	47,580	72,035	100,82	141,30	198,00	276,98
33,003	35,950	42,753	55,717	87,442	126,01	181,87	262,36	377,69
36,974	40,545	48,884	65,075	105,93	157,25	233,79	347,31	514,66
41,301	45,599	55,750	75,836	128,12	195,99	300,25	459,45	700,94
46,018	51,159	63,440	88,212	154,74	244,03	385,32	607,47	954,28
51,160	57,275	72,052	102,44	186,69	303,60	494,21	802,86	1298,8
56,765	64,002	81,699	118,81	225,03	377,46	633,59	1060,8	1767,4
62,873	71,403	92,503	137,63	271,03	469,06	812,00	1401,2	2404,7
69,532	79,543	104,60	159,28	326,24	582,63	1040,4	1850,6	3271,3
76,790	88,497	118,16	184,17	392,48	723,46	1332,7	2443,8	4450,0
84,701	98,347	133,33	212,79	471,98	898,09	1706,8	3226,8	6053,0
93,324	109,18	150,33	245,71	567,38	1114,6	2185,7	4260,4	8233,1
102,72	121,10	169,37	283,57	681,85	1383,1	2798,7	5624,8	11198
112,97	134,21	190,70	327,10	819,22	1716,1	3583,3	7425,7	15230
124,14	148,63	214,58	377,17	984,07	2129,0	4587,7	9802,9	20714
136,31	164,49	241,33	434,75	1181,9	2640,9	5873,2	12941	28172
337,88	442,59	767,09	1779,1	7343,9	22729	69377	—	—
815,08	1163,9	2400,0	7217,7	45497	—	—	—	—
1944,8	3034,8	7471,6	29220	—	—	—	—	—
$k_{н.ф} > 99999$								

Приложение 5

Таблица 6

Коэффициент приведения аннуитета $PVIFA_{i,n}$

n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%
1	0,9901	0,9804	0,9709	0,9615	0,9524	0,9434	0,9346	0,9259
2	1,9704	1,9416	1,9135	1,8861	1,8594	1,8334	1,8080	1,7833
3	2,9410	2,8839	2,8286	2,7751	2,7232	2,6730	2,6243	2,5771
4	3,9020	3,8077	3,7171	3,6299	3,5460	3,4651	3,3872	3,3121
5	4,8534	4,7135	4,5797	4,4518	4,3295	4,2124	4,1002	3,9927
6	5,7955	5,6014	5,4172	5,2421	5,0757	4,9173	4,7665	4,6229
7	6,7282	6,4720	6,2303	6,0021	5,7864	5,5824	5,3893	5,2064
8	7,6517	7,3255	7,0197	6,7327	6,4632	6,2098	5,9713	5,7466
9	8,5660	8,1622	7,7861	7,4353	7,1078	6,8017	6,5152	6,2469
10	9,4713	8,9826	8,5302	8,1109	7,7217	7,3601	7,0236	6,7101
11	10,3676	9,7868	9,2526	8,7605	8,3064	7,8869	7,4987	7,1390
12	11,2551	10,5753	9,9540	9,3851	8,8633	8,3838	7,9427	7,5361
13	12,1337	11,3484	10,6350	9,9856	9,3936	8,8527	8,3577	7,9038
14	13,0037	12,1062	11,2961	10,5631	9,8986	9,2950	8,7455	8,2442
15	13,8651	12,8493	11,9379	11,1184	10,3797	9,7122	9,1079	8,5595
16	14,7179	13,5777	12,5611	11,6523	10,8378	10,1059	9,4466	8,8514
17	15,5623	14,2919	13,1661	12,1657	11,2741	10,4773	9,7632	9,1216
18	16,3983	14,9920	13,7535	12,6593	11,6896	10,8276	10,0591	9,3719
19	17,2260	15,6785	14,3238	13,1339	12,0853	11,1581	10,3356	9,6036
20	18,0456	16,3514	14,8775	13,5903	12,4622	11,4699	10,5940	9,8181
21	18,8570	17,0112	15,4150	14,0292	12,8212	11,7641	10,8355	10,0168
22	19,6604	17,6580	15,9369	14,4511	13,1630	12,0416	11,0612	10,2007
23	20,4558	18,2922	16,4436	14,8568	13,4886	12,3034	11,2722	10,3711
24	21,2434	18,9139	16,9355	15,2470	13,7986	12,5504	11,4693	10,5288
25	22,0232	19,5235	17,4131	15,6221	14,0939	12,7834	11,6536	10,6748
26	22,7952	20,1210	17,8768	15,9828	14,3752	13,0032	11,8258	10,8100
27	23,5596	20,7069	18,3270	16,3296	14,6430	13,2105	11,9867	10,9352
28	24,3164	21,2813	18,7641	16,6631	14,8981	13,4062	12,1371	11,0511
29	25,0658	21,8444	19,1885	16,9837	15,1411	13,5907	12,2777	11,1584
30	25,8077	22,3965	19,6004	17,2920	15,3725	13,7648	12,4090	11,2578
35	29,4086	24,9986	21,4872	18,6646	16,3742	14,4982	12,9477	11,6546
40	32,8347	27,3555	23,1148	19,7928	17,1591	15,0463	13,3317	11,9246
45	36,0945	29,4902	24,5187	20,7200	17,7741	15,4558	13,6055	12,1084
50	39,1961	31,4236	25,7298	21,4822	18,2559	15,7619	13,8007	12,2335
55	42,1472	33,1748	26,7744	22,1086	18,6335	15,9905	13,9399	12,3186

Окончание табл. 6

9%	10%	12%	15%	20%	24%	28%	32%
0,9174	0,9091	0,8929	0,8696	0,8333	0,8065	0,7813	0,7576
1,7591	1,7355	1,6901	1,6257	1,5278	1,4568	1,3916	1,3315
2,5313	2,4869	2,4018	2,2832	2,1065	1,9813	1,8684	1,7663
3,2397	3,1699	3,0373	2,8550	2,5887	2,4043	2,2410	2,0957
3,8897	3,7908	3,6048	3,3522	2,9906	2,7454	2,5320	2,3452
4,4859	4,3553	4,1114	3,7845	3,3255	3,0205	2,7594	2,5342
5,0330	4,8684	4,5638	4,1604	3,6046	3,2423	2,9370	2,6775
5,5348	5,3349	4,9676	4,4873	3,8372	3,4212	3,0758	2,7860
5,9952	5,7590	5,3282	4,7716	4,0310	3,5655	3,1842	2,8681
6,4177	6,1446	5,6502	5,0188	4,1925	3,6819	3,2689	2,9304
6,8052	6,4951	5,9377	5,2337	4,3271	3,7757	3,3351	2,9776
7,1607	6,8137	6,1944	5,4206	4,4392	3,8514	3,3868	3,0133
7,4869	7,1034	6,4235	5,5831	4,5327	3,9124	3,4272	3,0404
7,7862	7,3667	6,6282	5,7245	4,6106	3,9616	3,4587	3,0609
8,0607	7,6061	6,8109	5,8474	4,6755	4,0013	3,4834	3,0764
8,3126	7,8237	6,9740	5,9542	4,7296	4,0333	3,5026	3,0882
8,5436	8,0216	7,1196	6,0472	4,7746	4,0591	3,5177	3,0971
8,7556	8,2014	7,2497	6,1280	4,8122	4,0799	3,5294	3,1039
8,9501	8,3649	7,3658	6,1982	4,8435	4,0967	3,5386	3,1090
9,1285	8,5136	7,4694	6,2593	4,8696	4,1103	3,5458	3,1129
9,2922	8,6487	7,5620	6,3125	4,8913	4,1212	3,5514	3,1158
9,4424	8,7715	7,6446	6,3587	4,9094	4,1300	3,5558	3,1180
9,5802	8,8832	7,7184	6,3988	4,9245	4,1371	3,5592	3,1197
9,7066	8,9847	7,7843	6,4338	4,9371	4,1428	3,5619	3,1210
9,8226	9,0770	7,8431	6,4641	4,9476	4,1474	3,5640	3,1220
9,9290	9,1609	7,8957	6,4906	4,9563	4,1511	3,5656	3,1227
10,0266	9,2372	7,9426	6,5135	4,9636	4,1542	3,5669	3,1233
10,1161	9,3066	7,9844	6,5335	4,9697	4,1566	3,5679	3,1237
10,1983	9,3696	8,0218	6,5509	4,9747	4,1585	3,5687	3,1240
10,2737	9,4269	8,0552	6,5660	4,9789	4,1601	3,5693	3,1242
10,5668	9,6442	8,1755	6,6166	4,9915	4,1644	3,5708	3,1248
10,7574	9,7791	8,2438	6,6418	4,9966	4,1659	3,5712	3,1250
10,8812	9,8628	8,2825	6,6543	4,9986	4,1664	3,5714	3,1250
10,9617	9,9148	8,3045	6,6605	4,9995	4,1666	3,5714	3,1250
11,0140	9,9471	8,3170	6,6636	4,9998	4,1666	3,5714	3,1250

Приложение 6

Таблица 7

Таблица смертности

Возраст x	Мужчины			Женщины		
	l_x	q_x	d_x	l_x	q_x	d_x
14	95438	0,00068	65	96407	0,00037	36
15	95373	0,00082	78	96371	0,00041	40
16	95295	0,00101	97	96331	0,00047	45
20	94774	0,00196	186	96116	0,00069	66
21	94588	0,00216	205	96050	0,00072	69
22	94383	0,00234	221	95981	0,00074	71
23	94162	0,00249	235	95910	0,00076	73
30	92216	0,00381	352	95337	0,00106	101
31	91864	0,00405	372	95236	0,00113	108
32	91492	0,00425	389	95128	0,00121	116
33	91103	0,00445	406	95012	0,00131	125
34	90697	0,00465	422	94887	0,00142	135
35	90275	0,00487	440	94752	0,00155	147
36	89835	0,00514	462	94605	0,00168	159
37	89373	0,00550	492	94446	0,00182	172
38	88881	0,00595	529	94274	0,00196	185
39	88352	0,00649	573	94089	0,00212	199
40	87779	0,00708	622	93890	0,00228	214
41	87157	0,0077	671	93676	0,00247	231
42	86486	0,00831	719	93445	0,00267	249
43	85767	0,00888	762	93196	0,00289	270
44	85005	0,00943	801	92926	0,00314	292
45	84204	0,00997	840	92634	0,00341	316
46	83364	0,01057	881	92318	0,00396	341
47	82483	0,01126	929	91977	0,00399	367
48	81554	0,01208	985	91610	0,00430	394
49	80569	0,01303	1050	91216	0,00465	424
50	79519	0,01409	1121	90729	0,00506	459
51	78398	0,01522	1199	90333	0,00554	500
52	77205	0,01637	1264	89833	0,00610	548
53	75941	0,01754	1332	89285	0,00673	601
54	74609	0,01872	1397	88684	0,00740	656
55	73212	0,01997	1462	88028	0,00806	709
56	71750	0,02136	1532	87319	0,00866	756
57	70218	0,02293	1610	86563	0,00919	795
58	68608	0,02470	1695	85768	0,00969	831
59	66913	0,02665	1783	84937	0,01023	869
60	65130	0,02871	1870	77150	0,01094	919

Окончание табл. 7

Возраст x	Мужчины			Женщины		
	l_x	q_x	d_x	l_x	q_x	d_x
61	63260	0,0308	1949	84068	0,011193	992
62	91311	0,03296	2021	83149	0,01318	1083
63	59290	0,03523	2089	82157	0,01467	1189
64	57201	0,03765	2153	81074	0,01634	1305
65	55048	0,04027	2217	79885	0,01819	1430
66	52048	0,04310	2277	78580	0,02024	1561
67	50554	0,04616	2333	75589	0,02249	1700
68	48221	0,04947	2385	73889	0,02497	1845
69	45836	0,05304	2431	72044	0,02771	1997
70	43405	0,05691	2470	70043	0,03073	2153

Примечание: Возраст человека обозначен символом x; число лиц, доживших до каждого возраста l_x; число умирающих при переходе от возраста x к возрасту $x + 1$ обозначено символом d_x; $q_x = d_x / l_x$; начальная совокупность — 100 000 человек.

Приложение 7

Таблица 8

Коммутационные числа
(норма накопления 9,0%, мужчины)

x	D_x	N_x	C_x	M_x		R_x
30	6 950,424689	76 703,000313	24,340037	617,149434	25,411744	644,322925
31	6 352,196375	69 752,575624	23,599076	592,809397	24,638159	618,911181
32	5 804,104020	63 400,379249	22,639935	569,210321	23,636786	594,273022
33	5 302,226139	57 596,275228	21,678294	546,570386	22,632803	570,636236
34	4 842,749356	52 294,049089	20,672120	524,892092	21,582327	548,003433
35	4 422,217198	47 451,299733	19,774192	504,219972	20,644863	526,421106
36	4 037,305806	43 029,082535	19,048534	484,445780	19,887253	505,776243
37	3 684,901747	38 991,776729	18,610506	465,397246	19,429939	485,888990
38	3 362,033298	35 306,874983	18,357868	446,786740	19,166177	466,459051
39	3 066,076350	31 944,841685	18,242935	428,428872	19,046183	447,292874
40	2 794,671148	28 878,765334	18,167868	410,185937	18,967811	428,246691
41	2 545,750616	26 084,094186	17,980825	392,018069	18,772532	409,278879
42	2 317,570199	23 538,343570	17,676223	374,037244	18,454519	390,506347
43	2 108,534969	21 220,773371	17,186564	356,361021	17,943300	372,051828
44	1 917,249187	19 112,238402	16,574488	339,174457	17,304273	354,108529
45	1 742,369721	17 194,989215	15,946317	322,599969	16,648443	336,804256
46	1 582,558015	15 452,619494	15,343714	306,653653	16,019308	320,155813
47	1 436,544372	13 870,061479	14,843756	291,309938	15,497336	304,136504
48	1 303,086861	12 433,517107	14,439024	276,466182	15,074783	288,639168
49	1 181,053509	11 130,430246	14,120966	262,027158	14,742721	273,564385
50	1 069,414363	9 949,376738	13,831020	247,906192	14,440009	258,821663
51	967,283075	8 879,962374	13,504004	234,075172	14,098594	244,381654
52	873,911661	7 912,679299	13,126311	220,571168	13,704271	230,283061
53	788,627507	7 038,767638	12,690342	207,444858	13,249106	216,578790
54	710,821132	6 250,140132	12,210657	194,754515	13,748300	203,329683
55	639,918822	5 539,319000	11,723667	182,543859	12,239868	190,581384
56	575,357821	4 899,400178	11,270635	170,820191	11,766888	178,341516
57	516,580577	4 324,042357	10,866483	159,549556	11,344941	166,574627
58	463,060652	3 807,461781	10,495577	148,683074	10,957704	155,229686
59	414,330709	3 344,401129	10,128881	138,187497	10,574862	144,271982
60	369,991036	2 930,070420	9,745974	128,058616	10,175095	133,697120
61	329,695343	2 560,079384	9,318993	118,312642	9,729314	123,522025
62	293,153799	2 230,384041	8,865372	108,993649	9,255720	113,792711
63	260,083068	1 937,230241	8,407030	100,128278	8,777196	104,536991
64	230,201290	1 677,147173	7,949168	91,721248	8,299175	95,759795
65	203,244676	1 446,945883	7,509600	83,772008	7,840253	87,460620
66	178,953405	1 243,701207	7,075997	76,262480	7,387558	79,620367
67	157,101439	1 064,747801	6,651397	69,186483	6,944262	72,232808
68	137,478363	907,646363	6,238211	62,535085	6,512883	65,288546
69	119,888728	770,168000	5,833512	56,296875	6,090365	58,775663
70	104,156147	650,279271	5,437704	50,463363	5,677130	52,685298
71	90,118393	546,123125	5,049311	45,025658	5,271636	47,008167
72	77,628114	456,004731	4,671308	39,976347	4,876989	41,736532
73	66,547145	378,376617	4,300903	35,305039	4,490275	36,859543
74	56,751523	311,829272	3,941104	31,004136	4,114633	32,369268

Окончание табл. 8

x	D_x	N_x	C_x	M_x		R_x
75	48,124514	255,077949	3,588506	27,063032	3,746510	28,254635
76	40,562424	206,953435	3,251514	23,474526	3,394681	24,508124
77	33,961719	166,391011	2,926439	20,223011	3,055292	21,113444
78	28,231101	132,429292	2,615200	17,296573	2,730349	18,058152
79	23,284893	104,198191	2,319189	14,681373	2,421305	15,327803
80	19,043098	80,913298	2,039352	12,362183	2,129147	12,906498
81	15,431380	61,870200	1,776266	10,322831	1,854476	10,777352

Литература

1. *Бабешко Л.О.* Математическое моделирование финансовой деятельности: учеб. пособие / Л.О. Бабешко. — М.: КНОРУС, 2009. — 224 с.

2. *Бочаров П.П.* Финансовая математика: учеб. / П.П. Бочаров, Ю.Ф. Касимов. — М.: Гардарики, 2002. — 623 с.

3. *Криничанский К.В.* Математика финансового менеджмента: учеб. пособие / К. В. Криничанский. — М.: Дело и Сервис, 2006. — 246 с.

4. *Симчера В.М.* Введение в финансовые и актуарные вычисления / В.М. Симчера. — М.: Финансы и статистика, 2003. — 346 с.

5. *Четыркин Е.М.* Финансовая математика: учеб. — М.: Дело, 2005. — 400 с.

6. Финансовая математика: Математическое моделирование финансовых операций: учеб. пособие / Под ред. В.А. Половникова и А.И. Пилипенко. — М.: Вузовский учебник, 2004. — 360 с.



CD АДВОКАТУРА В РФ. А.В. Гриненко, ред.
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК
2009. ISBN 978-5-390-00250-6
Код 216599 Цена 250,00



CD АДМИНИСТРАТИВНОЕ ПРАВО РОССИИ. Н.Ю. Хаманева, ред.
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК
2009. ISBN 978-5-390-00285-8
Код 224044 Цена 250,00



CD АНАЛИЗ И ДИАГНОСТИКА ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЙ (ТЕОРИЯ, МЕТОДИКА, СИТУАЦИИ, ЗАДАНИЯ). В.Д. Герасимова
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК. ГРИФ УМО
2009. ISBN 978-5-406-00102-8
Код 235992 Цена 250,00



CD АНАЛИЗ ФИНАНСОВОЙ ОТЧЕТНОСТИ. Б.Т. Жарылгасова, А.Е. Суглобов
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК. ГРИФ МИНОБРНАУКИ
2009. ISBN 978-5-85971-754-5
Код 197749 Цена 250,00



CD БАКАЛАВР: МАКРОЭКОНОМИКА. Н.Н. Думная, ред
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК. ГРИФ МИНОБРНАУКИ
2009. ISBN 978-5-85971-866-5
Код 193633 Цена 250,00



CD БАКАЛАВР: МИКРОЭКОНОМИКА. А.Ю. Юданов, ред.
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК. ГРИФ МИНОБРНАУКИ
2009. ISBN 978-5-85971-867-2
Код 180578 Цена 250,00



CD БЕЗОПАСНОСТЬ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ. А.И. Сидорова, ред.
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК. ГРИФ УМЦ
2009. ISBN 978-5-390-00395-4
Код 216602 Цена 250,00



CD БИЗНЕС-ПЛАНИРОВАНИЕ. В.З. Черняк
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК
2009. ISBN 978-5-85971-626-5
Код 187408 Цена 250,00



CD БУХГАЛТЕРСКИЙ УЧЕТ. Н.Г. Сапожникова
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК. ГРИФ МИНОБРНАУКИ
2009. ISBN 978-5-390-00283-4
Код 216604 Цена 250,00



CD БУХГАЛТЕРСКИЙ УЧЕТ В БЮДЖЕТНЫХ ОРГАНИЗАЦИЯХ.
Н.Л. Кондраков, И.Н. Кондраков
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК. ГРИФ УМЦ
2009. ISBN 978-5-390-00284-1
Код 216605 Цена 250,00



CD ВВЕДЕНИЕ В КУРС МИРОВОЙ ЭКОНОМИКИ (ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ГЕОГРАФИЯ ЗАРУБЕЖНЫХ СТРАН). Е.Н. Смирнов
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК. ГРИФ УМО
2009. ISBN 978-5-406-00090-8
Код 235936 Цена 250,00



CD ВВЕДЕНИЕ В ПОЛИТОЛОГИЮ. В.П. Пугачев, А.И. Соловьев
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК. ГРИФ УМО
2009. ISBN 978-5-406-00091-5
Код 216663 Цена 250,00



CD ВВЕДЕНИЕ В ЭКОНОМЕТРИКУ. Л.П. Яновский, А.Г. Буховец
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК. ГРИФ УМО
2009. ISBN 978-5-390-00014-4
Код 235396 Цена 250,00



CD ГЕОГРАФИЯ РОССИЙСКОГО ВНУТРЕННЕГО ТУРИЗМА. А.Б. Косолапов
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК. ГРИФ УМЦ
2009. ISBN 978-5-406-00103-5
Код 235993 Цена 250,00



CD ГОСУДАРСТВЕННАЯ ГРАЖДАНСКАЯ СЛУЖБА. В.Д. Граждан
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК. ГРИФ УМЦ
2009. ISBN 978-5-390-00073-1
Код 195517 Цена 250,00



CD ГРАЖДАНСКОЕ ПРОЦЕССУАЛЬНОЕ ПРАВО. Л.В. Туманова, ред.
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК
2009. ISBN 978-5-406-00015-1
Код 235233 Цена 250,00



CD ДЕМОГРАФИЯ. В.Г. Глушкова и Ю.А. Симагин, ред.
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК. ГРИФ УМО
2009. ISBN 978-5-406-00064-9
Код 235937 Цена 250,00



CD ДЕНЬГИ, КРЕДИТ, БАНКИ. О.И. Лаврушин, ред.
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК. ГРИФ МИНОБРНАУКИ
2009. ISBN 978-5-406-00076-2
Код 235938 Цена 250,00



CD ЖИЛИЩНО-КОММУНАЛЬНОЕ ХОЗЯЙСТВО. РАЗВИТИЕ, УПРАВЛЕНИЕ, ЭКОНОМИКА. В.З. Черняк
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК
2009. ISBN 978-5-406-00077-9
Код 199671 Цена 250,00



CD ЖИЛИЩНОЕ ПРАВО. Ю.К. Толстой
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК
2009. ISBN 978-5-406-00078-6
Код 235939 Цена 250,00



CD ИНВЕСТИЦИИ. А.Ю. Андрианов и др.
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК
2009. ISBN 978-5-390-00075-5
Код 195520 Цена 250,00



CD ИННОВАЦИОННЫЙ МЕНЕДЖМЕНТ. А.Г. Ивасенко, Я.И. Никонова, А.О. Сизова
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК. ГРИФ УМО
2009. ISBN 978-5-406-00062-5
Код 235940 Цена 250,00



CD ИНФОРМАЦИОННОЕ ПРАВО. О.А. Городов
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК
2009. ISBN 978-5-406-00012-0
Код 235941 Цена 250,00



CD ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ И ТЕХНОЛОГИИ В ЭКОНОМИКЕ И УПРАВЛЕНИИ.
В.В. Трофимов., ред.
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК
2009. ISBN 978-5-406-00104-2
Код 235994 Цена 250,00



CD ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ. И.А. Коноплёва, О.А. Хохлова, А.В. Денисов
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК. ГРИФ МИНОБРНАУКИ
2009. ISBN 978-5-390-00286-5
Код 216606 Цена 250,00




CD ИСТОРИЯ ГОСУДАРСТВА И ПРАВА ЗАРУБЕЖНЫХ СТРАН. К.И. Батыр, ред.
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК. ГРИФ МИНОБРНАУКИ
2009. ISBN 978-5-390-00514-9
Код 232565 Цена 250,00



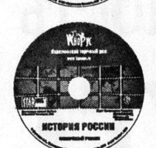
CD ИСТОРИЯ ГОСУДАРСТВЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ В РОССИИ. Н.А. Омельченко
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК. ГРИФ МИНОБРНАУКИ
2009. ISBN 978-5-406-00013-7
Код 235943 Цена 250,00



CD ИСТОРИЯ МУЗЕЙНОГО ДЕЛА В РОССИИ: КЛАССИКА ОТЕЧЕСТВЕННОЙ МУЗЕЕВЕДЧЕСКОЙ МЫСЛИ
2009. ISBN 978-5-406-00035-9
Код 235155 Цена 500,00



CD ИСТОРИЯ ПОЛИТИЧЕСКИХ УЧЕНИЙ. А.А. Чаньшев
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК
2009. ISBN 978-5-390-00288-9
Код 216607 Цена 250,00



CD ИСТОРИЯ РОССИИ. А.П. Деревянко, Н.А. Шабельникова
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК
2009. ISBN 978-5-390-00287-2
Код 216608 Цена 250,00



CD ИСТОРИЯ СТРАН АЗИИ И АФРИКИ В НОВЕЙШЕЕ ВРЕМЯ. А.М. Родригес
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК
2009. ISBN 978-5-406-00014-4
Код 235234 Цена 250,00



CD КОМПЛЕКСНЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ХОЗЯЙСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ.
А.И. Алексеева, Ю.В. Васильев, А.В. Малеева, Л.И. Ушвицкий
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК. ГРИФ УМО
2009. ISBN 978-5-390-00383-1
Код 217747 Цена 250,00



CD КОНСТИТУЦИОННОЕ ПРАВО РОССИИ. А.Е. Постников, ред.
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК
2009. ISBN 978-5-406-00092-2
Код 235944 Цена 250,00



CD КОНТРОЛЬ И РЕВИЗИЯ. М.Ф. Овсийчук, ред.
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК. ГРИФ УМО
2009. ISBN 978-5-390-00387-9
Код 217758 Цена 250,00



CD КОНЦЕПЦИИ СОВРЕМЕННОГО ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ. А.Ф. Лихин
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК
2009. ISBN 978-5-406-00093-9
Код 235947 Цена 250,00



CD КРИМИНАЛИСТИКА. Л.Я. Драпкин, В.Н. Карагодин
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК
2009. ISBN 978-5-390-00282-7
Код 232566 Цена 250,00



ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСПЕКТ»
111020, Москва, ул. Боровая, д.7, стр.4
(495) 967-1572
e-mail: mail@prospekt.org
www.prospekt.org

Е.В. Ширшов, Н.И. Петрик, А.Г. Тутыгин, Т.В. Меньшикова

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

